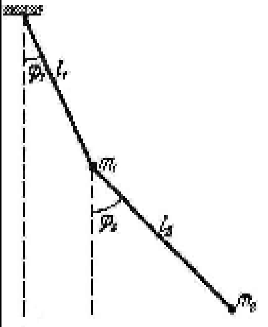
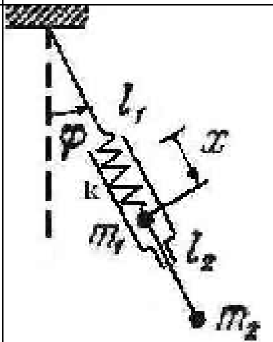
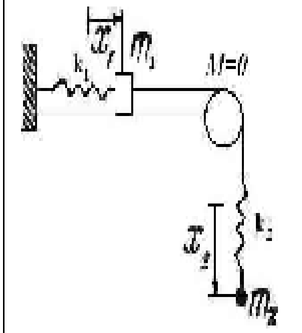
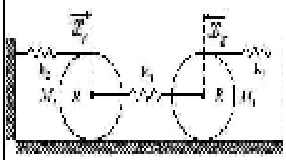
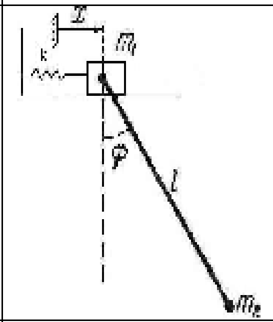
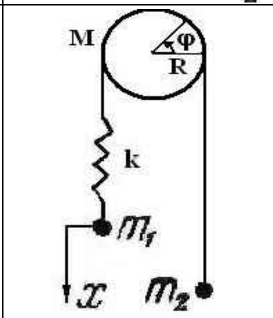
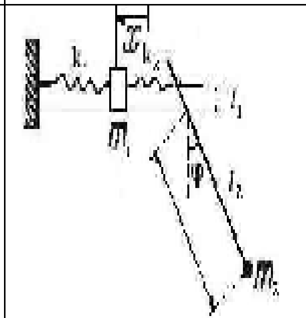
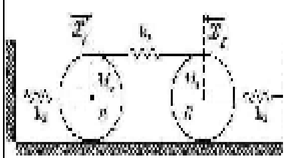
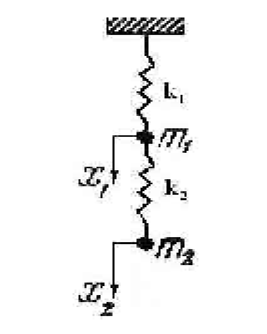
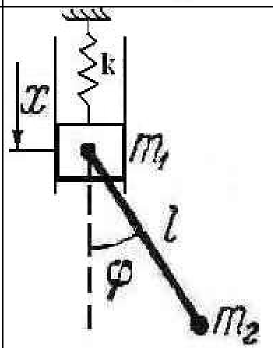
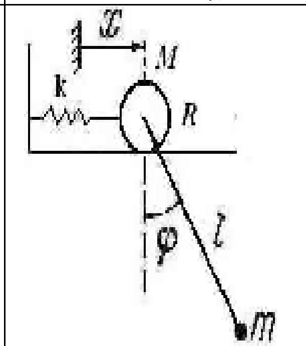
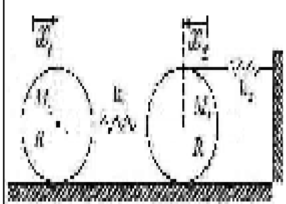
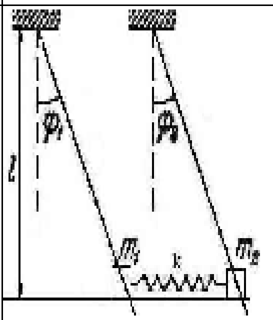
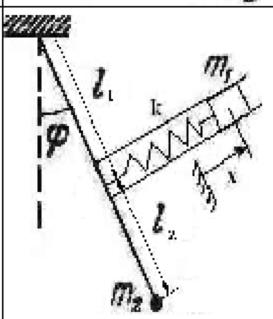
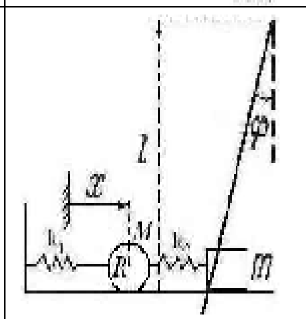
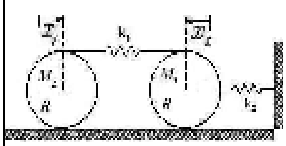
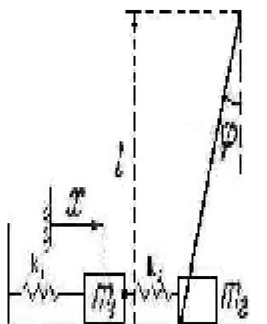
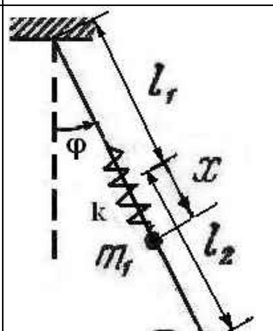
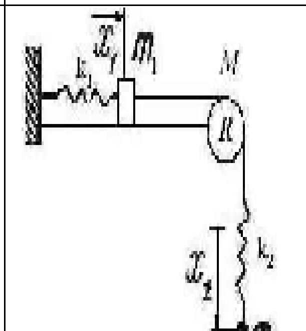
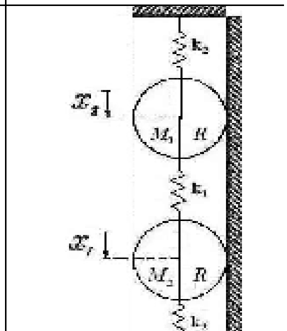
Задача II-1.

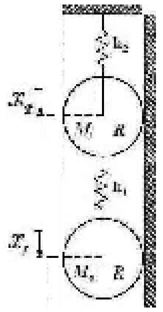
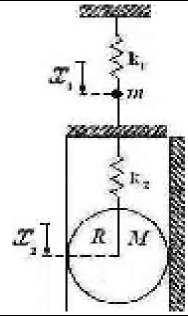
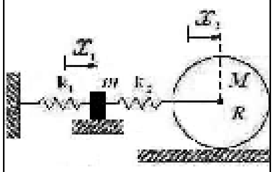
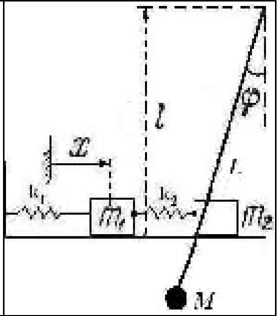
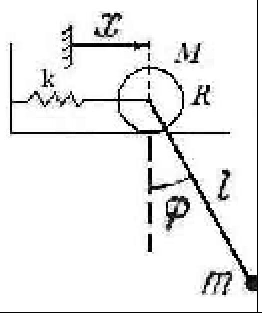
По заданной функции Лагранжа $L=L(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_{21})$ (q_1,q_2-обобщенные координаты) найти функцию Гамильтона $H=H(q_1,q_2,p_1,p_2)$ (p_1,p_2-обобщенные импульсы) механической системы с двумя степенями свободы. Выписать системы уравнений Лагранжа и Гамильтона. Вывести из полученной системы уравнений Гамильтона систему уравнений Лагранжа и сравнить результат с ранее полученным.

N варианта	$L=L(q_1,q_2)$	N варианта	$L=L(q_1,q_2)$
1	$L=6\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+2q_1^2+4q_2^2$	15	$L=\dot{q}_2^2+2\dot{q}_1^2+2\dot{q}_2\cos(q_2)$
2	$L=2\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+3q_1^2+4q_1q_2$	16	$L=\dot{q}_1\dot{q}_2+2\dot{q}_2q_2+2\dot{q}_1q_1$
3	$L=2\dot{q}_1^2+2\dot{q}_2^2+4q_2^2+2q_1q_2$	17	$L=\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+3\dot{q}_1q_1$
4	$L=4\dot{q}_1^2+4\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+4q_1q_2$	18	$L=2\dot{q}_2^2+6\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+3q_2^2$
5	$L=\dot{q}_1^2+2\dot{q}_2^2+2\dot{q}_1\cos(q_1)$	19	$L=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+2\dot{q}_1\cos(q_1)$
6	$L=\dot{q}_1\dot{q}_2+2\dot{q}_1q_1+2\dot{q}_2q_2$	20	$L=4\dot{q}_1^2+4\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+12q_1^2$
7	$L=\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+3\dot{q}_2q_2$	21	$L=\frac{1}{3}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2)+\dot{q}_2q_2$
8	$L=2\dot{q}_1^2+6\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+3q_1^2$	22	$L=\dot{q}_1^2+3\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{3}{2}q_1^2$
9	$L=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+2\dot{q}_2\cos(q_2)$	23	$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\dot{q}_2\cos(q_2)$
10	$L=4\dot{q}_1^2+4\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+12q_2^2$	24	$L=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\frac{1}{4}\dot{q}_1\dot{q}_2+3q_2^2$
11	$L=6\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+2q_2^2+4q_1^2$	25	$L=\frac{3}{2}\dot{q}_1^2+\frac{1}{4}\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}q_2^2+q_1^2$
12	$L=2\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+3q_{21}^2+4q_1q_2$		
13	$L=2\dot{q}_1^2+2\dot{q}_2^2+4q_1^2+2q_1q_2$		
14	$L=8\dot{q}_1^2+8\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2+4q_1q_2$		

<u>Задача II-2.</u>

Найти функцию Лагранжа и выписать уравнения Лагранжа для механических систем и обобщенных координат, показанных на рисунках. Считать, что при нулевых значениях обобщенных координат пружины не растянуты. Цилиндры катаются без проскальзывания.

N	Механическая система	N	Механическая система	N	Механическая система	N	Механическая система
1		6		11		16	
2		7		12		17	
8		8		13		18	
9		9		14		19	
10		10		15		20	

N	Механическая система	N	Механическая система	N	Механическая система	N	Механическая система
21		22		23		24	
25		26		28		29	30

<u>Задача II-3.</u> Линеаризовать (при необходимости) полученные в задаче II-2 уравнения Лагранжа. Найти собственные частоты колебаний, выписать общее решение линейной системы уравнений, описывающих малые свободные колебания заданной механической системы, и выразить нормальные координаты через используемые обобщенные.

<u>ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ПО МЕХАНИКЕ – II (ВАРИАНТ №1)</u>

<u>Задача II-1.</u>

<u>Дано</u>:

$L = 6\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + 2q_1^2 + 4q_2^2$

<u>Найти</u>:

$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2) = ?$

уравнения Лагранжа=?

уравнения Гамильтона=?

УГ → УЛ

<u>Решение</u>

При известной функции Лагранжа $L = L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ гамильтониан вычисляется по формуле

$$H = p_k \dot{q}_k(p_k, q_k) - L(p_k, q_k). \qquad (1)$$

Для расчетов по (1) требуется выразить обобщенные скорости через обобщенные импульсы и координаты. Из определения обобщенного импульса

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

получаем систему двух линейных уравнений для нахождения обобщенных скоростей:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_2 = p_1, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 12\dot{q}_2 + \dot{q}_1 = p_2. \end{cases} \tag{2}$$

откуда

$$\dot{q}_2 = p_1, \quad \dot{q}_1 = p_2 - 12\dot{q}_2 = p_2 - 12p_1. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), находим гамильтониан

$$H = p_k\dot{q}_k - L = p_1(p_2 - 12p_1) + p_2p_1 - 6p_1^2 - (p_2 - 12p_1)p_1 - 2q_1^2 - 4q_2^2 = p_1p_2 - 6p_1^2 - 2q_1^2 - 4q_2^2. \tag{4}$$

По известному лагранжиану выписываем уравнения Лагранжа**:**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$$

или, используя (2),

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}_2\right) - 4q_1 = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(12\dot{q}_2 + \dot{q}_1\right) - 8q_2 = 0,$$

откуда

$$\begin{cases} \ddot{q}_2 - 4q_1 = 0, \\ \ddot{q}_1 + 12\ddot{q}_2 - 8q_2 = 0 \end{cases}$$

и, разрешая относительно старших производных, окончательный вид уравнений Лагранжа:

$$\begin{cases} \ddot{q}_2 = 4q_1, \\ \ddot{q}_1 = -48q_1 + 8q_2. \end{cases} \tag{5}$$

Теперь по построенному гамильтониану (4) выписываем канонические уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = 4q_1, \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = 8q_2, \\ \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = -12p_1 + p_2, \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = p_1. \end{cases}$$

т.е., окончательно, уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 4q_1, \\ \dot{p}_2 = 8q_2, \\ \dot{q}_1 = -12p_1 + p_2, \\ \dot{q}_2 = p_1. \end{cases} \qquad (6)$$

Дифференцируя третье и четвертое уравнения системы (6), с использованием первых двух уравнений получаем

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -48q_1 + 8q_2, \\ \ddot{q}_2 = 4q_1, \end{cases}$$

что совпадает с ранее полученными уравнениями Лагранжа (5)

Ответ: 1. Гамильтониан: $H = p_1 p_2 - 6p_1^2 - 2q_1^2 - 4q_2^2$.

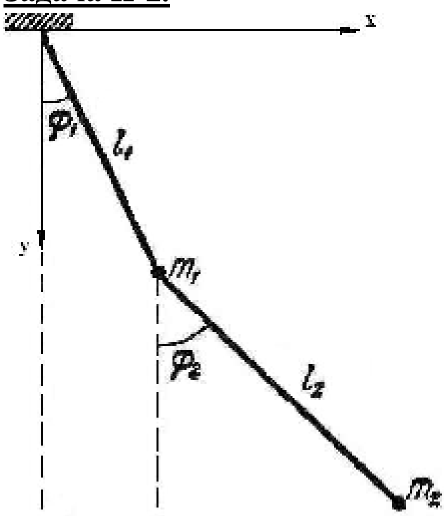
2. Уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} \ddot{q}_2 = 4q_1, \\ \ddot{q}_1 = -48q_1 + 8q_2. \end{cases}$$

3. Уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 4q_1, \\ \dot{p}_2 = 8q_2, \\ \dot{q}_1 = -12p_1 + p_2, \\ \dot{q}_2 = p_1. \end{cases}$$

Задача II-2.



Дано:

Найти: $L = L(j_1, j_2, \dot{j}_1, \dot{j}_2) = ?$
уравнения Лагранжа=?

Решение

По определению функции Лагранжа

$$L = L(j_1, j_2, \dot{j}_1, \dot{j}_2) = T - U. \qquad (1)$$

Найдем кинетическую энергию системы *T*. Используя выражения декартовых координат м.т. (x_1, y_1, x_2, y_2) через обобщенные координаты (j_1, j_2):

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin(j_1), \\ y_1 = l_1 \cos(j_1), \\ x_2 = l_1 \sin(j_1) + l_2 \sin(j_2), \\ y_2 = l_1 \cos(j_1) + l_2 \cos(j_2), \end{cases} \qquad (2)$$

получаем

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(V_{1x}^2 + V_{1y}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(V_{2x}^2 + V_{2y}^2\right) =$$

$$= \frac{m_1}{2}\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2\right) =$$

$$=\frac{m_1}{2}\left(\left(\frac{d}{dt}\left(l_1\sin(j_1)\right)\right)^2+\left(\frac{d}{dt}\left(l_1\cos(j_1)\right)\right)^2\right)+\frac{m_2}{2}\left(\left(\frac{d}{dt}\left(l_1\sin(j_1)+l_2\sin(j_2)\right)\right)^2+\left(\frac{d}{dt}\left(l_1\cos(j_1)+l_2\cos(j_2)\right)\right)^2\right)=$$

$$=\frac{m_1l_1^2\dot{j}_1^{\,2}}{2}\left(\cos^2(j_1)+\sin^2(j_1)\right)+\frac{m_2}{2}\left(\left(l_1\dot{j}_1\cos(j_1)+l_2\dot{j}_2\cos(j_2)\right)^2+\left(-l_1\dot{j}_1\sin(j_1)-l_2\dot{j}_2\sin(j_2)\right)^2\right)=$$

$$=\frac{m_1l_1^2\dot{j}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2}{2}\left(l_1^2\dot{j}_1^{\,2}\left(\cos^2(j_1)+\sin^2(j_1)\right)+l_2^2\dot{j}_2^{\,2}\left(\cos^2(j_2)+\sin^2(j_2)\right)+2l_1l_1\dot{j}_1\dot{j}_2\left(\cos(j_1)\cos(j_2)+\sin(j_1)\sin(j_2)\right)\right)=$$

$$=\frac{(m_1+m_2)l_1^2\dot{j}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2l_2^2\dot{j}_2^{\,2}}{2}+m_2l_1l_2\dot{j}_1\dot{j}_2\cos(j_1-j_2). \qquad (3)$$

Найдем потенциальную энергию системы, считая, что для каждой массы она отсчитывается от положения $j_1=0,\ j_2=0$:

$$U=U_1+U_2=m_1g\,(y_1(0)-y_1(j_1))+m_2g\,(y_1(0{,}0)-y_1(j_1,j_2))=m_1g\,(l_1-l_1\cos(j_1))+$$
$$+m_2g\,(l_1+l_2-l_1\cos(j_1)-l_2\cos(j_2))=(m_1+m_2)\,g\,l_1\,(1-\cos(j_1))+m_2\,g\,l_2\,(1-\cos(j_2)) \qquad (4)$$

Из (1), (3), (4) получаем лагранжиан рассматриваемой механической системы (из лагранжиана вычли константу $(-m_1+m_2)\,g\,l_1-m_2\,g\,l_2$):

$$L=T-U=\frac{(m_1+m_2)l_1^2\dot{j}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2l_2^2\dot{j}_2^{\,2}}{2}+m_2l_1l_2\dot{j}_1\dot{j}_2\cos(j_1-j_2)+ \qquad (5)$$
$$+(m_1+m_2)\,g\,l_1\cos(j_1)+m_2\,g\,l_2\cos(j_2).$$

Система уравнения Лагранжа в нашем случае имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{j}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial j_1}=0,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{j}_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial j_2}=0.\end{cases} \qquad (6)$$

Вычислим входящие в (6) производные лагранжиана:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial\dot{j}_1}=(m_1+m_2)l_1^2\dot{j}_1+m_2l_1l_2\dot{j}_2\cos(j_1-j_2),\\ &\frac{\partial L}{\partial\dot{j}_2}=m_2l_1l_2\dot{j}_1\cos(j_1-j_2)+m_2l_2^2\dot{j}_2,\\ &\frac{\partial L}{\partial j_1}=-m_2l_1l_2\dot{j}_1\dot{j}_2\sin(j_1-j_2)-(m_1+m_2)\,g\,l_1\sin(j_1),\\ &\frac{\partial L}{\partial j_2}=-m_2l_1l_2\dot{j}_1\dot{j}_2\sin(j_2-j_1)-m_2\,g\,l_2\sin(j_2)\end{aligned} \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получаем систему уравнения движения:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{j}_1+m_2l_1l_2\cos(j_1-j_2)\ddot{j}_2-m_2l_1l_2\sin(j_1-j_2)\dot{j}_2^{\,2}+(m_1+m_2)\,g\,l_1\sin(j_1)=0,\\ m_2l_1l_2\cos(j_1-j_2)\ddot{j}_1+m_2l_2^2\ddot{j}_2-m_2l_1l_2\sin(j_1-j_2)\dot{j}_1^{\,2}+m_2\,g\,l_2\sin(j_2)=0.\end{cases} \qquad (8)$$

<u>Ответ:</u> 1. Функция Лагранжа:

$$\frac{(m_1+m_2)l_1^2\dot{j}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2 l_2^2\dot{j}_2^{\,2}}{2}+m_2 l_1 l_2\,\dot{j}_1\dot{j}_2\cos(j_1-j_2)++(m_1+m_2)\,g\,l_1\cos(j_1)+m_2\,g\,l_2\cos(j_2).$$

2. Уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{j}_1+m_2 l_1 l_2\cos(j_1-j_2)\ddot{j}_2-m_2 l_1 l_2\sin(j_1-j_2)\dot{j}_2^{\,2}+(m_1+m_2)\,g\,l_1\sin(j_1)=0,\\ m_2 l_1 l_2\cos(j_1-j_2)\ddot{j}_1\quad+\quad m_2 l_2^2\ddot{j}_2\;-\;m_2 l_1 l_2\sin(j_1-j_2)\dot{j}_1^{\,2}\;+\;m_2\,g\,l_2\sin(j_2)=0.\end{cases}$$

<u>Задача II-3.</u>

<u>Дано</u>:
уравнения Лагранжа

<u>Найти</u>:
1. собственные частоты колебаний $w_{1,2}=?$
2. общее решение для малых свободных колебаний
3. нормальные координаты

<u>Решение</u>

Линеаризуем ($\cos(j_1-j_2)\approx 1,\ \sin(j_1)\approx j_1, \sin(j_2)\approx j_2$) полученную в предыдущей задаче систему уравнений движения и в результате получим систему линейных дифференциальных уравнений, которая после несложных преобразований имеет вид:

$$\begin{cases}\ddot{j}_1+\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\dfrac{l_2}{l_1}\ddot{j}_2+\dfrac{g}{l_1}j_1=0,\\[2ex] \ddot{j}_1\quad+\quad\dfrac{l_2}{l_1}\ddot{j}_2\quad+\quad\dfrac{g}{l_1}j_2=0.\end{cases}$$

или, вводя круговую частоту колебаний $w_0^2=g/l_1$ механической системы при $m_2=0$ и безразмерные параметры $\tilde{l}_2=l_2/l_1,\ \tilde{m}_2=m_2/(m_1+m_2)$:

$$\begin{cases}\ddot{j}_1+\tilde{m}_2\tilde{l}_2\ddot{j}_2+w_0^2\,j_1=0,\\ \ddot{j}_1\;+\;\tilde{l}_2\ddot{j}_2+w_0^2\,j_2=0.\end{cases}\qquad(1)$$

Ищем решение (1) в виде

$$\begin{Vmatrix}j_1\\ j_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}C_1\\ C_2\end{Vmatrix}e^{iwt}$$

и получаем

$$\begin{cases}(w_0^2-w^2)C_1-\tilde{m}_2\tilde{l}_2w^2\;C_2=0,\\ \quad -w^2C_1\;+\;(w_0^2-\tilde{l}_2w^2)C_2=0.\end{cases}\qquad(2)$$

Однородная система линейных уравнений (2) имеет ненулевое решение, когда ее детерминант равен нулю

$$\begin{vmatrix}w_0^2-w^2 & -\tilde{m}_2\tilde{l}_2w^2\\ -w^2 & w_0^2-\tilde{l}_2w^2\end{vmatrix}=0.$$

Вычисляем этот детерминант и находим собственные частоты малых колебаний:

$$(w_0^2 - w^2)(w_0^2 - \tilde{l}_2 w^2) - \tilde{m}_2 \tilde{l}_2 w^4 = 0,$$
$$\tilde{l}_2 (1-\tilde{m}_2) w^4 - w_0^2 (1+\tilde{l}_2)\, w^2 + w_0^4 = 0,$$
$$w_{1,2}^2 = \frac{w_0^2 (1+\tilde{l}_2) \pm \sqrt{w_0^4 (1+\tilde{l}_2)^2 - 4 w_0^4 \tilde{l}_2 (1-\tilde{m}_2)}}{2\tilde{l}_2 (1-\tilde{m}_2)} = \frac{(1+\tilde{l}_2) \pm \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}}{2\tilde{l}_2 (1-\tilde{m}_2)}\, w_0^2 .$$

В частном случае равных длин ($l_1 = l_2 = l,\ \tilde{l}_2 = l_2 / l_1 = 1$) и масс ($m_1 + m_2$, $\tilde{m}_2 = m_2 /(m_1 + m_2) = 1/2$) получаем:

$$w_{1,2}^2 = \frac{(1+\tilde{l}_2) \pm \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}}{2\tilde{l}_2 (1-\tilde{m}_2)}\, w_0^2 = (2 \pm \sqrt{2})\, w_0^2,$$

$$w_1^2 = (2+\sqrt{2})\, w_0^2 = 3{,}41 \frac{g}{l}, \qquad w_2^2 = (2-\sqrt{2})\, w_0^2 = 0{,}586 \frac{g}{l}.$$

Из второго (т.к. уравнения линейно - зависимы, то можно использовать любое из них) уравнения системы (2) находим (используем, что компоненты собственных векторов можно одновременно делить и умножать на любое неравное нулю число).

$$\left\| \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} w_0^2 - \tilde{l}_2 w^2 \\ w^2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \left(1 - \dfrac{(1+\tilde{l}_2) \pm \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}}{2(1-\tilde{m}_2)}\right) w_0^2 \\ \dfrac{(1+\tilde{l}_2) \pm \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2)}}{2\tilde{l}_2 (1-\tilde{m}_2)} \quad w_0^2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (1-\tilde{l}_2 - 2m_2 \mp \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}\ )\tilde{l}_2 \\ 1+\tilde{l}_2 \pm \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2)} \end{matrix} \right\|$$

После нахождения векторов записываем общий вид решения:

$$\left\| \begin{matrix} j_1 \\ j_2 \end{matrix} \right\| = A_1 \left\| \begin{matrix} (1-\tilde{l}_2 - 2m_2 - \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}\ )\tilde{l}_2 \\ 1+\tilde{l}_2 + \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2)} \end{matrix} \right\| \cos(w_1 t + y_1) + A_2 \left\| \begin{matrix} (1-\tilde{l}_2 - 2m_2 + \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}\ )\tilde{l}_2 \\ 1+\tilde{l}_2 - \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2)} \end{matrix} \right\| \cos(w_2 t + y_2). \quad (3)$$

Из общего вида решения получаем систему линейных уравнений для выражения нормальных координат $x_1(t) = A_1 \cos(w_1 t + y_1),\ x_2(t) = A_2 \cos(w_2 t + y_2)$ через используемые обобщенные координаты $j_1,\ j_2$

$$\left\| \begin{matrix} (1-\tilde{l}_2 - 2m_2 - \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}\ )\tilde{l}_2 \\ 1+\tilde{l}_2 + \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2)} \end{matrix} \right\| x_1 + \left\| \begin{matrix} (1-\tilde{l}_2 - 2m_2 + \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}\ )\tilde{l}_2 \\ 1+\tilde{l}_2 - \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2)} \end{matrix} \right\| x_2 = \left\| \begin{matrix} j_1 \\ j_2 \end{matrix} \right\|.$$

или

$$\left\| \begin{matrix} (1-\tilde{l}_2 - 2m_2 - \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}\ )\tilde{l}_2 & (1-\tilde{l}_2 - 2m_2 + \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}\ )\tilde{l}_2 \\ 1+\tilde{l}_2 + \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2)} & 1+\tilde{l}_2 - \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2)} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} j_1 \\ j_2 \end{matrix} \right\|.$$

По правилу Крамера находим:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \left| \begin{matrix} j_1 & (1-\tilde{l}_2 - 2m_2 + \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}\ )\tilde{l}_2 \\ j_2 & 1+\tilde{l}_2 - \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2} \end{matrix} \right| \sim$$
$$\sim (1+\tilde{l}_2 - \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2})\, j_1 - \tilde{l}_2\, (1-\tilde{l}_2 - 2m_2 + \sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2 + 4\tilde{m}_2 \tilde{l}_2}\ )\, j_2,$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} (1-\tilde{l}_2-2m_2-\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\tilde{l}_2 & j_1 \\ 1+\tilde{l}_2+\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2)} & j_2 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim -(1+\tilde{l}_2+\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\,j_1+\tilde{l}_2\,(1-\tilde{l}_2-2m_2-\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\,j_2.$$

В случае равных длин и масс имеем:

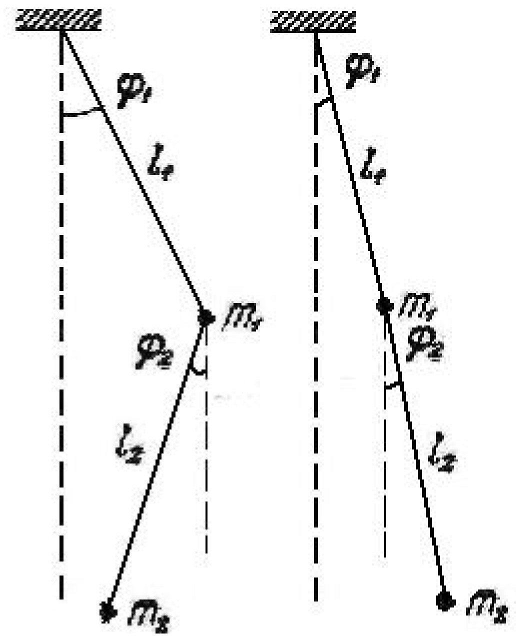
$$x_1 = (1+\tilde{l}_2-\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\,j_1-\tilde{l}_2\,(1-\tilde{l}_2-2m_2+\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\,j_2 =$$

$$= (2-\sqrt{2})\,j_1-(\sqrt{2}-1)\,j_2 \sim \left(j_1-\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}\,j_2\right) = j_1-m_1 j_2.$$

$$x_2 = -(1+\tilde{l}_2+\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\,j_1+\tilde{l}_2\,(1-\tilde{l}_2-2m_2-\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\,j_2 \sim$$

$$\sim (2+\sqrt{2})\,j_1+(1+\sqrt{2})\,j_2 \sim j_1+\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\,j_2 = j_1+m_2 j_2.$$

Таким образом, первая нормальная координата соответствует отклонению масс в разные стороны при отношении углов



$$m_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} \approx 0{,}707.$$

Вторая нормальная координата соответствует отклонению масс в одну и ту же сторону при отношении углов

$$m_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \approx 0{,}707.$$

Формы нормальных колебаний изображены на рисунке.

Ответ: 1. Собственные частоты:

$$w_1^2 = \frac{(1+\tilde{l}_2)+\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2}}{2\tilde{l}_2(1-\tilde{m}_2)}\;w_0^2.$$

$$w_2^2 = \frac{(1+\tilde{l}_2)-\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2}}{2\tilde{l}_2(1-\tilde{m}_2)}\;w_0^2.$$

2. Общее решение для малых свободных колебаний:

$$\begin{Vmatrix} j_1 \\ j_2 \end{Vmatrix} = A_1\begin{Vmatrix} (1-\tilde{l}_2-2m_2-\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\tilde{l}_2 \\ 1+\tilde{l}_2+\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2)} \end{Vmatrix}\cos(w_1 t+y_1)+A_2\begin{Vmatrix} (1-\tilde{l}_2-2m_2+\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\tilde{l}_2 \\ 1+\tilde{l}_2-\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2)} \end{Vmatrix}\cos(w_2 t+y_2).$$

3. Нормальные координаты:

$$x_1 = (1+\tilde{l}_2-\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\,j_1-\tilde{l}_2\,(1-\tilde{l}_2-2m_2+\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\,j_2,$$

$$x_2 = -(1+\tilde{l}_2+\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\,j_1+\tilde{l}_2\,(1-\tilde{l}_2-2m_2-\sqrt{(1-\tilde{l}_2)^2+4\tilde{m}_2\tilde{l}_2})\,j_2.$$

*********ТВОРЧЕСКИХ УСПЕХОВ ВАМ!!!*********