Задача I-1.

Материальная точка движется с постоянным ускорением $\vec{g}=(g_x,g_y)$. В начале движения она имеет скорость V_0 с углом наклона к оси X равным α (угол – положителен при повороте от оси X к оси Y) и начальный радиус - вектор $\vec{r}_0=(x_0,y_0)$. Описать движение этой материальной точки векторным, координатным и естественным способами. Определить максимальные значения координат x_{max}, y_{max} и времена их достижения, если движение заканчивается на уровне $y=y_к$.

N варианта	g_x , м\с^2	g_y , м\с^2	V_0, м\с	α, рад	x_0 , м	y_0, м	$y_к$, м
1	0	-10	10	π/3	1	-5	-6
2	-0,1	-10	10	π/3	2	-4	-5
3	-0,2	-10	10	π/3	3	-3	-4
4	-0,3	-10	10	π/3	4	-2	-3
5	-0,4	-10	10	π/3	5	-1	-2
6	-0,5	-10	10	π/3	6	0	-1
7	-0,6	-10	10	π/3	7	1	0
8	-0,7	-10	10	π/3	8	2	1
9	-0,8	-10	10	π/3	9	3	2
10	-0,9	-10	10	π/3	10	4	3
11	0	-20	20	π/4	1	-5	-6
12	-0,1	-20	20	π/4	2	-4	-5
13	-0,2	-20	20	π/4	3	-3	-4
14	-0,3	-20	20	π/4	4	-2	-3
15	-0,4	-20	20	π/4	5	-1	-2
16	-0,5	-20	20	π/4	6	0	-1
17	-0,6	-20	20	π/4	7	1	0
18	-0,7	-20	20	π/4	8	2	1
19	-0,8	-20	20	π/4	9	3	2
20	-0,9	-20	20	π/4	10	4	3
21	0	-10	10	π/6	1	-5	-6
22	-0,1	-10	10	π/6	2	-4	-5
23	-0,2	-10	10	π/6	3	-3	-4
24	-0,3	-10	10	π/6	4	-2	-3
25	-0,4	-10	10	π/6	5	-1	-2
26	-0,5	-10	10	π/6	6	0	-1
27	-0,6	-10	10	π/6	7	1	0
28	-0,7	-10	10	π/6	8	2	1
29	-0,8	-10	10	π/6	9	3	2
30	-0,9	-10	10	π/6	10	4	3

Задача I-2.

Материальная точка движется от центра по радиусу диска с начальной скоростью u и ускорением a относительно него. Диск вращается с постоянной угловой скоростью w. Найти скорость V_{abs} и ускорение a_{abs} материальной точки в момент времени t относительно инерциальной системы координат, в которой ось диска покоится.

N варианта	u , м\с	a , м\с^2	w, 1\с	t, с
1	0	1	10	1
2	0,1	1	10	1
3	0,2	1	10	1
4	0,3	1	10	1
5	0,4	1	10	1
6	0,5	1	10	1
7	0,6	1	10	1
8	0,7	1	10	1
9	0,8	1	10	1
10	0,9	1	10	1
11	0	2	5	2
12	0,1	2	5	2
13	0,2	2	5	2
14	0,3	2	5	2
15	0,4	2	5	2
16	0,5	2	5	2
17	0,6	2	5	2
18	0,7	2	5	2
19	0,8	2	5	2
20	0,9	2	5	2
21	0	1	10	1
22	0,1	1	10	1
23	0,2	1	10	1
24	0,3	1	10	1
25	0,4	1	10	1
26	0,5	1	10	1
27	0,6	1	10	1
28	0,7	1	10	1
29	0,8	1	10	1
30	0,9	1	10	1

Задача II-1.

Материальная точка массой m=1*кг* движется под действием переменной силы с $F_x = 10*(1-t)^n\ H$, $F_y = F_z = 0$ где t – время в секундах. Через сколько времени Δt тело остановится, если начальная скорость тела имеет компоненты (V_{0x}, 0, 0)? Какой путь S пройдет материальная точка до остановки?

N варианта	n	V_{0x}, м\с
1	1	10
2	1	11
3	1	12
4	1	13
5	1	14
6	1	15
7	1	16
8	1	17
9	1	18
10	1	19
11	3	20
12	3	21
13	3	22
14	3	23
15	3	24
16	3	25
17	3	26
18	3	27
19	3	28
20	3	29
21	5	30
22	5	31
23	5	32
24	5	33
25	5	34
26	5	35
27	5	36
28	5	37
29	5	38
30	5	39

Задача II-2.

Капля дождя (плотность воды ρ=1 г/см^3) падает под действием силы тяжести в воздушной среде. Считая, что сопротивление воздуха пропорционально скорости V и радиусу капли R ($F_c = \alpha \mathrm{R}\,\mathrm{V}$, α – коэффициент пропорциональности), найти установившуюся скорость падения $V_{\text{k}} = \lim(V(t))$ (при $t \to \infty$). Каково будет значение скорости при $t = t_0$?

N варианта	α, 10^{-4}кг/м/с	R, мм	t_0, с
1	3,4	2,0	1
2	3,4	1,9	1
3	3,4	1,8	1
4	3,4	1,7	1
5	3,4	1,6	1
6	3,4	1,5	1
7	3,4	1,4	1
8	3,4	1,3	1
9	3,4	1,2	1
10	3,0	1,1	1
11	3,0	1,0	2
12	3,0	0,9	2
13	3,0	0,8	2
14	3,0	0,7	2
15	3,0	0,6	2
16	3,0	0,5	2
17	3,0	0,4	2
18	3,0	0,3	2
19	3,0	0,2	2
20	2,5	0,1	2
21	2,5	2,0	3
22	2,5	1,9	3
23	2,5	1,8	3
24	2,5	1,7	3
25	2,5	1,6	3
26	2,5	1,5	3
27	2,5	1,4	3
28	2,5	1,3	3
29	2,5	1,2	3
30	2,5	1,1	3

Задача III-1. Материальная точка скользит вверх по гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=\pi/3$ и коэффициентом трения k. Скорость вначале подъема равнялась V_0. Определить на какую высоту H_m и за какое время T поднимется м.т. Найти высоту подъема $H_{об}$, когда вместо материальной точки на наклонную плоскость закатывается без проскальзывания обруч. Трением качения пренебречь.

N варианта	V_0, *м/с*	k
1	10	0,01
2	10	0,02
3	10	0,03
4	10	0,04
5	10	0,05
6	10	0,06
7	10	0,07
8	10	0,08
9	10	0,09
10	10	0,1
11	20	0,01
12	20	0,02
13	20	0,03
14	20	0,04
15	20	0,05
16	20	0,06
17	20	0,07
18	20	0,08
19	20	0,09
20	20	0,1
21	30	0,01
22	30	0,02
23	30	0,03
24	30	0,04
25	30	0,05
26	30	0,06
27	30	0,07
28	30	0,08
29	30	0,09
30	30	0,1

<u>Задача III-2.</u> Пушка стреляет на льду под углом $\alpha = \pi/3$ к горизонту. Масса пушки M, масса снаряда m. Определить на какое расстояние L откатится пушка после выстрела, если скорость снаряда V, а коэффициент трения о лед k.

N варианта	M, т	m, кг	V, м/с	k
1	1	10	100	0,01
2	1	10	110	0,02
3	1	10	120	0,03
4	1	10	130	0,04
5	1	10	140	0,05
6	1	10	150	0,06
7	1	10	160	0,07
8	1	10	170	0,08
9	1	10	180	0,09
10	1	10	190	0,1
11	2	20	200	0,01
12	2	20	210	0,02
13	2	20	220	0,03
14	2	20	230	0,04
15	2	20	240	0,05
16	2	20	250	0,06
17	2	20	260	0,07
18	2	20	270	0,08
19	2	20	280	0,09
20	2	20	290	0,1
21	3	30	300	0,01
22	3	30	310	0,02
23	3	30	320	0,03
24	3	30	330	0,04
25	3	30	340	0,05
26	3	30	350	0,06
27	3	30	360	0,07
28	3	30	370	0,08
29	3	30	380	0,09
30	3	30	390	0,1

<u>Задача III-3.</u> В тонкой U-образной трубке одинакового сечения наблюдаются колебания уровня жидкости. Длина трубки, занятая жидкостью равна L. Найти период таких колебаний T, считая их свободными.

N варианта	L, см
1	1,0
2	1,1
3	1,2
4	1,3
5	1,4
6	1,5
7	1,6
8	1,7
9	1,8
10	1,9
11	2,0
12	2,1
13	2,2
14	2,3
15	2,4
16	2,5
17	2,6
18	2,7
19	2,8
20	2,9
21	3,0
22	3,1
23	3,2
24	3,3
25	3,4
26	3,5
27	3,6
28	3,7
29	3,8
30	3,9

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ ПО МЕХАНИКЕ – I (ВАРИАНТ №1)

Задача I-1.

Дано:
g_x=0 м\с^2,
g_y = -10 м\с^2,
V_0=10 м\с,
$\alpha = \pi/3$,
x_0 =1 м,
y_0=-5 м,
$y_к$=-6 м.
Найти:
$\vec{r} = \vec{r}(t)$,
$x = x(t)$, $y = y(t)$,
$y = y(x)$, $s = s(t)$,
x_k, x_{max}, y_{max},
t_k, t^x_{max}, t^y_{max}.

Решение

Опишем движение м.т. **векторным способом.** Согласно условию задачи точка движется с постоянным ускорением $\vec{g}$ и следовательно, согласно определению ускорения, имеем

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\vec{V} = \vec{g}t + \vec{V}_0.$$

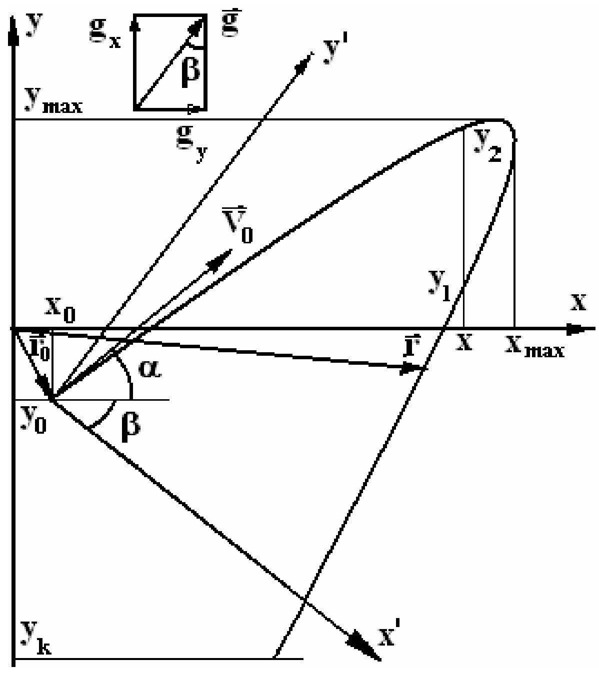
Интегрируя еще раз, определяем искомый радиус- вектор м.т.:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + (V_0\cos(\alpha)\vec{i} + V_0\sin(\alpha)\vec{j})t + (g_x\vec{i} + g_y\vec{j})\frac{t^2}{2} = \tag{1}$$
$$= (x_0 + V_0\cos(\alpha)\,t + g_x\frac{t^2}{2})\vec{i} + (y_0 + V_0\sin(\alpha)t + g_y\frac{t^2}{2})\vec{j}.$$

Подставляя в (1) численные значения получаем:

$$\vec{r} = (1 + 10\cos(\pi/3)t)\vec{i} + (5 + 10\sin(\pi/3)t)\vec{j} = (1 + 5\,t)\vec{i} + (5 + 8{,}66t - 5t^2)\vec{j}. \tag{2}$$

Проектируя векторное уравнение (1) на оси декартовой системы координат, получаем описание движение м.т. **координатным способом**:



$$\begin{cases} x = x_0 + V_{0x}t + g_x\dfrac{t^2}{2} = x_0 + V_0\cos(\alpha)\,t + g_x\dfrac{t^2}{2}, \\ y = y_0 + V_{0y}t + g_y\dfrac{t^2}{2} = y_0 + V_0\sin(\alpha)t + g_y\dfrac{t^2}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

Подставляя в (3) численные значения получаем

$$\begin{cases} x = 1 + 10\cos(\pi/3)t = 1 + 5\,t, \\ y = 5 + 10\sin(\pi/3)t - 5t^2 \approx 5 + 8{,}66t - 5t^2, \end{cases} \tag{4}$$

что, очевидно, совпадает с результатом (2).

Форму траектории найдем, исключая время t из системы (3). Умножим первое уравнение этой системы на $\sin(\alpha)$ и вычтем из результата второе уравнение, умноженное на $\cos(\alpha)$

$$x\sin(\alpha) - y\cos(\alpha) = x_0\sin(\alpha) - y_0\cos(\alpha) + (g_x\sin(\alpha) - g_y \tag{5}$$

Откуда находим ($\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$)

$$\frac{t^2}{2} = \frac{\Delta x\sin(\alpha) - \Delta y\cos(\alpha)}{g_x\sin(\alpha) - g_y\cos(\alpha)} \tag{6}$$

Теперь умножим первое уравнение системы (3) на g_y и вычтем из результата второе уравнение, умноженное на g_x

$$xg_y - yg_x = x_0 g_y - y_0 g_x + V_0(g_y\cos(\alpha) - g_x\sin(\alpha))t,$$

откуда находим t

$$t=\frac{\Delta x g_y-\Delta y g_x}{V_0(g_y\cos(\alpha)-g_x\sin(\alpha))}.$$

Подставляем найденное t в (6)

$$\frac{(\Delta x g_y-\Delta y g_x)^2}{2\,V_0^2(g_y\cos(\alpha)-g_x\sin(\alpha))^2}=\frac{\Delta x\sin(\alpha)-\Delta y\cos(\alpha)}{g_x\sin(\alpha)-g_y\cos(\alpha)}.$$

или

$$(\Delta x g_y-\Delta y g_x)^2=2\,V_0^2(g_y\cos(\alpha)-g_x\sin(\alpha))(\Delta x\sin(\alpha)-\Delta y\cos(\alpha)).\quad(7)$$

Соотношение (7) представляет собой квадратное уравнение относительно Δy

$g_x^2\Delta y^2-\Delta y(2g_xg_y\Delta x+2\,V_0^2(g_x\sin(\alpha)-g_y\cos(\alpha))\cos(\alpha))+\Delta x^2g_y^2-2\,V_0^2(g_y\cos(\alpha)-g_x\sin(\alpha))\Delta x\sin(\alpha)=0.$ и из него определяется зависимость $y=y(x)$

$$y=y_0+\Delta y=y_0+\frac{g_xg_y\Delta x+V_0^2(g_x\sin(\alpha)-g_y\cos(\alpha))\cos(\alpha)}{g_x^2}\pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{(g_xg_y\Delta x+V_0^2(g_x\sin(\alpha)-g_y\cos(\alpha))\cos(\alpha))^2-g_x^2g_y^2\,\Delta x^2+2\,g_x^2V_0^2(g_y\cos(\alpha)-g_x\sin(\alpha))\Delta x\sin(\alpha)}}{g_x^2}=\quad(8)$$

$$=y_0\pm\frac{g_xg_y\Delta x+V_0^2(g_x\sin(\alpha)-g_y\cos(\alpha))\cos(\alpha)+V_0(g_x\sin(\alpha)-g_y\cos(\alpha))\sqrt{V_0^2\cos^2(\alpha)-2\,g_x\Delta x}}{g_x^2}.$$

Таким образом, траектория состоит из двух ветвей (для каждого x получается два значения y; см. рисунок, на котором траектория изображена для случая $g_x<0,\ g_y<0$), соответствующих различным знакам в (8). Покажем, что зависимость $y=y(x)$ представляет собой наклоненную к осям параболу. Запишем (7) в виде

$$(\Delta x g_y-\Delta y g_x)^2=V_0^2(g_y\Delta x+g_x\Delta y)\sin(2\alpha)-2V_0^2(g_y\Delta y\cos^2(\alpha)+g_x\Delta x\sin^2(\alpha)).$$

и сделаем линейную замену переменных

$$\begin{cases}x'=\Delta x\cos(\beta)-\Delta y\sin(\beta)=(g_y\Delta x-g_x\Delta y)/g,\\ y'=\Delta x\sin(\beta)+\Delta y\cos(\beta)=(g_x\Delta x+g_y\Delta y)/g,\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\Delta x=(g_yx'+g_xy')/g,\\ \Delta y=(-g_xx'+g_yy')/g.\end{cases}$$

которая переносит начало системы координат в точку (x_0,y_0) и поворачивает ее на угол β так, чтобы ось x' стала перпендикулярной вектору ускорения (g_x,g_y) (см. рисунок):

$$x'^2=\frac{V_0^2\sin(2\alpha)}{g^2}\left(g_y\left(\frac{g_y}{g}x'+\frac{g_x}{g}y'\right)+g_x\left(-\frac{g_x}{g}x'+\frac{g_y}{g}y'\right)\right)-\frac{2V_0^2}{g}\left(\frac{g_y\cos^2(\alpha)}{g}\left(-\frac{g_x}{g}x'+\frac{g_y}{g}y'\right)+\frac{g_x\sin^2(\alpha)}{g}\left(\frac{g_y}{g}x'+\frac{g_x}{g}y'\right)\right).$$

$$\frac{2V_0^2}{g^3}(g_y^2\cos^2(\alpha)+g_x^2\sin^2(\alpha)-g_xg_y\sin(2\alpha))y'=-x'^2+\frac{V_0^2}{g}\left(\sin(2\alpha)\frac{g_y^2-g_x^2}{g^2}+\frac{2g_xg_y}{g^2}\cos(2\alpha)\right)x'.$$

$$y'=-\frac{g^3}{2V_0^2(g_y\cos(\alpha)+g_x\sin(\alpha))^2}x'^2+\frac{(g_y^2-g_x^2)\sin(2\alpha)+2g_xg_y\cos(2\alpha)}{2(g_y\cos(\alpha)+g_x\sin(\alpha))^2}x'.\quad(9)$$

Уравнение (9) описывает параболу, проходящую через начало координат (это очевидно, является результатом перемещения начала координат в начальную точку движения), ветви которой направлены вниз.

В нашем случае $g_x=0$ и (9) существенно упрощается ($g=\lfloor g_y\rfloor$):

$$y'=-\frac{g}{2V_0^2\cos^2(\alpha)}x'^2+tg(\alpha)x'.\quad(10)$$

Определим функцию $s=s(t)$, используя (3):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(V_0 \cos(\alpha)\, d\,t + g_x t\, dt)^2 + (V_0 \sin(\alpha)\, d\,t + g_y t\, dt)^2} =$$
$$= \sqrt{g^2 t^2 + 2V_0 (\, g_x \cos(\alpha) + g_y \sin(\alpha)) + V_0{}^2}\, dt, \quad \textit{откуда}$$
$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{g^2 t^2 + 2V_0 (\, g_x \cos(\alpha) + g_y \sin(\alpha)) + V_0{}^2}\, dt.$$

Время $t^y_{\max}$ соответствующую ему координату $y_{\max}$ найдем из условия $dy(t^y_{\max}) / dt = 0$, используя второе уравнение системы (3):

$$dy / dt = d / dt(y_0 + V_0 \sin(\alpha)\, t + g_y \frac{t^2}{2}) = V_0 \sin(\alpha) + g_y t = 0,$$
$$t^y_{\max} = -\frac{V_0 \sin(\alpha)}{g_y} = -\frac{10 \times \sin(\pi / 3)}{-10} \approx 0{,}866c,$$
$$y_{\max} = y(t^y_{\max}) = y_0 - \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{g_y} + \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g_y} = y_0 - \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g_y} = -5 - \frac{10^2 * (3/4)}{2 \times (-10)} = -1{,}25\textit{м}.$$

Аналогично находим $t^x_{\max}$:

$$dx / dt = d / dt(x_0 + V_0 \cos(\alpha)\, t + g_x \frac{t^2}{2}) = V_0 \cos(\alpha) + g_x t = 0,$$
$$t^x_{\max} = -\frac{V_0 \cos(\alpha)}{g_y}. \tag{11}$$
$$x_{\max} = x(t^x_{\max}) = x_0 - \frac{V_0^2 \cos^2(\alpha)}{g_x} + \frac{V_0^2 \cos^2(\alpha)}{2g_x} = x_0 - \frac{V_0^2 \cos^2(\alpha)}{2g_x}.$$

В рассматриваемом варианте N 1 $g_x = 0$ и максимума не существует (в соотношениях (11) это проявляется в делении на ноль). Поэтому максимальное значение x реализуются на одном из концов траектории. Найдем время, соответствующее концу движения, используя (3)(знак минус выбран из условия положительности времени t_k):

$$y(t_k) = y_k \quad \textit{или} \quad g_y t^2 + 2V_0 \sin(\alpha)\, t + 2(y_0 - y_k) = 0,$$
$$t_k = \frac{-V_0 \sin(\alpha) - \sqrt{V_0^2 \sin^2(\alpha) - 2g_y (y_0 - y_k)}}{g_y} \approx \frac{-10 \times 0{,}866 - \sqrt{100 \times 0{,}75 - 2 \times (-10)(-5 - (-6))}}{-10} \approx 1{,}84c,$$
$$x_k = x(t_k) = x_0 + V_0 \cos(\alpha)\, t_k + g_x \frac{t_k^2}{2} = 1 + 10 \times 0{,}5 \times 1{,}84 = 10{,}2\textit{м}.$$

В данном случае получалось, что $x_k > x_0$, следовательно,

$$x_{\max} = x_k = 10{,}2\textit{м}.$$

Ответ:

$$\vec{r} = (x_0 + V_0 \cos(\alpha)\, t + g_x \frac{t^2}{2})\vec{i} + (y_0 + V_0 \sin(\alpha) t + g_y \frac{t^2}{2})\vec{j} = (1 + 5\, t)\vec{i} + (5 + 8{,}66t - 5t^2)\vec{j},$$
$$\begin{cases} x = x_0 + V_0 \cos(\alpha)\, t + g_x \dfrac{t^2}{2} = 1 + 5\, t, \\ y = y_0 + V_0 \sin(\alpha) t + g_y \dfrac{t^2}{2} = 5 + 8{,}66t - 5t^2, \end{cases}$$

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{g^2 t^2 + 2V_0 (g_x \cos(\alpha) + g_y \sin(\alpha)) + V_0^2}\, dt,$$

$$t_k = \frac{-V_0 \sin(\alpha) - \sqrt{V_0^2 \sin^2(\alpha) - 2g_y (y_0 - y_k)}}{g_y} \approx 1{,}84c, \quad x_k = x_0 + V_0 \cos(\alpha)\ t_k + g_x \frac{t_k^2}{2} = 10{,}2м,$$

$$t_{\max}^x = t_k \approx 1{,}84c, \quad x_{\max} = x_k = 10{,}2м.$$

$$t_{\max}^y = -\frac{V_0 \sin(\alpha)}{g_y} \approx 0{,}866c, \quad y_{\max} = y_0 - \frac{V_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g_y} = -1{,}25м.$$

Задача I-2.

Дано:
u =0 м\с,
a = 1 м\с^2,
w=10 1\с,
t=1 с.
Найти:
V_{abs}, a_{abs}.

Решение

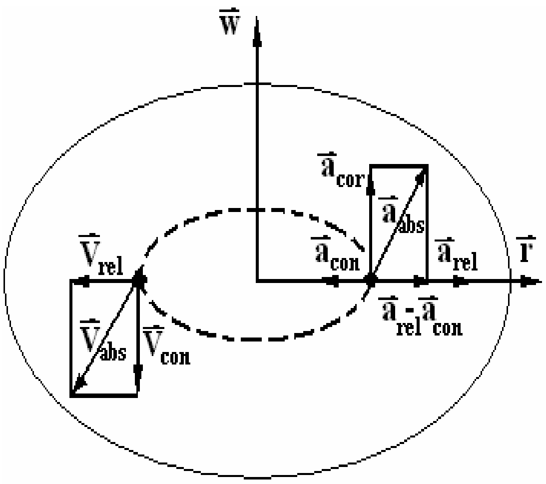
По закону сложения скоростей Лоренца имеем:

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{con} + \vec{V}_{rel} \qquad (1)$$

Эти скорости перпендикулярны (см. рисунок) и равны следующим значениям:

$$\left|\vec{V}_{con}\right| = wr = w(ut + \frac{at^2}{2}), \qquad \left|\vec{V}_{rel}\right| = u + at.$$

Поскольку скорости перпендикулярны, то по теореме Пифагора получаем:



$$V_{abs} = \left|\vec{V}_{abs}\right| = \sqrt{(u + at)^2 + w^2 t^2 (u + \frac{at}{2})^2} =$$

$$= \sqrt{(0 + 1\times 1)^2 + 10^2 \times 1^2 (0 + \frac{1\times 1}{2})^2} \approx 5{,}1\, м/с.$$

По закону сложения ускорений имеем:

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{con} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}.$$

Ускорения $\vec{a}_{con}, \vec{a}_{rel}$ противоположно направлены вдоль радиуса диска, а $\vec{a}_{cor}$ им перпендикулярно, как это показано на рисунке. По величине они равны:

$$a_{con} = \left|\vec{a}_{con}\right| = \left|[\vec{w},[\vec{w},\vec{r}\,]]\right| = w^2 r = w^2 (ut + \frac{at^2}{2}),$$

$$a_{rel} = \left|\,\vec{a}_{rel}\right| = a, \quad a_{cor} = \left|\,\vec{a}_{cor}\right| = \left|2[\vec{w},\vec{V}_{rel}\,]\right| = 2w(u + at).$$

Поэтому

$$a_{abs} = \left|\vec{a}_{abs}\right| = \sqrt{a^2{}_{cor} + (a_{con} - a_{rel})^2} = \sqrt{4w^2 (u + at)^2 + \left(w^2 (ut + \frac{at^2}{2}) - a \right)^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{4\times 10^2 (0 + 1\times 1)^2 + \left(10^2 (0\times 1 + \frac{1\times 1^2}{2}) - 1 \right)^2} \approx \sqrt{4\times 10^2 + 49} \approx 21{,}2м/с^2.$$

Ответ:

$$V_{abs} = \sqrt{(u + at)^2 + w^2 t^2 (u + \frac{at}{2})^2} \approx 5{,}1м/с, \quad a_{abs} = \sqrt{4w^2 (u + at)^2 + \left(w^2 (ut + \frac{at^2}{2}) - a \right)^2} \approx 21{,}2м/с^2.$$

Задача II-1.

Дано:
$m=1$кг,
$F_x = 10*(1-t)^n\ H$,
$F_y = F_z = 0$,
$n=1$
V_{0x}=10 м\с

Найти:
Δt, S

Решение

Согласно условию задачи только $x^{\underline{ые}}$ компоненты силы и начальной скорости отличны от нуля. Поэтому движение м.т. будет одномерным вдоль оси x. По второму закону Ньютона, спроектированному на ось x, имеем

$$m\frac{dV_x}{dt} = F_x \quad \text{или} \quad m\frac{dV_x}{dt} = 10*(1-t)^n. \tag{1}$$

Интегрируя (1), получаем:

$$V_x - V_{0x} = \frac{10}{m}\int_0^t (1-t)^n dt = -\frac{10}{m}\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^t = \frac{10}{m(n+1)}(1-(1-t)^{n+1}),$$

откуда

$$V_x = V_{0x} + \frac{10}{m(n+1)}(1-(1-t)^{n+1}). \tag{2}$$

Время остановки Δt находим из условия $V_x = 0$, используя (2):

$$V_{0x} + \frac{10}{m(n+1)}(1-(1-\Delta t)^{n+1}) = 0 \quad \textit{или} \quad (1-(1-\Delta t)^{n+1}) = -\frac{m(n+1)}{10}V_{0x},$$

$$(1-\Delta t)^{n+1} = 1 + \frac{m(n+1)}{10}V_{0x} \quad \textit{или} \quad |1-\Delta t| = \left(1+\frac{m(n+1)}{10}V_{0x}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad ,$$

$$-(1-\Delta t) = \left(1+\frac{m(n+1)}{10}V_{0x}\right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \textit{или} \quad \Delta t = 1 + \left(1+\frac{m(n+1)}{10}V_{0x}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

При расчете Δt учтено, что $\Delta t > 1$, т.к. при $t < 1$ имеем $F_x > 0$ и, следовательно, $a_x > 0$, т.е. скорость увеличивается и м.т. не может остановиться на первой секунде. Подставляя числовые значения, получаем:

$$\Delta t = 1 + \left(1+\frac{m(n+1)}{10}V_{0x}\right)^{\frac{1}{n+1}} = 1 + \sqrt{1+\frac{1*(1+1)}{10}10} \approx 2{,}73c.$$

Путь находим интегрированием (2):

$$S = \int_0^{\Delta t} V_x dt = \int_0^{\Delta t}\left(V_{0x} + \frac{10}{m(n+1)}(1-(1-t)^{n+1})\right)dt = V_{0x}\Delta t + \frac{10}{m(n+1)}(\Delta t + \frac{(1-t)^{n+2}}{n+2}\Bigg|_0^{\Delta t}) =$$

$$= V_{0x}\Delta t + \frac{10}{m(n+1)}\left(\Delta t + \frac{(1-\Delta t)^{n+2}-1}{n+2}\right) \approx 10\times 2{,}73 + \frac{10}{1\times(1+1)}\left(2{,}73 + \frac{(1-2{,}73)^3-1}{(1+2)}\right) \approx$$

$$\approx 27{,}3 + 5\times(2{,}73-2{,}06) \approx 30{,}7\textit{м}$$

Ответ:

$$\Delta t = 1 + \left(1+\frac{m(n+1)}{10}V_{0x}\right)^{\frac{1}{n+1}} \approx 2{,}73c, \quad S = V_{0x}\Delta t + \frac{10}{m(n+1)}\left(\Delta t + \frac{(1-\Delta t)^{n+2}-1}{n+2}\right) \approx 30{,}7\textit{м}.$$

Задача II-2.

Дано:
ρ=1 г/см^3=10^3 кг/м^3,
$F_c = \alpha \mathrm{R\,V}$,
t_0=1с,
α= 3,4×10^{-4}кг/м/c,
R=2×10^{-3}м.
Найти:
V_k, $V(t_0)$.

Решение

Второй закон Ньютона, спроектированный на направление действия силы тяжести, записывается в виде

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{dV}{dt} = -\alpha \mathrm{R\,V} + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \quad \text{или} \quad \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau}\mathrm{V} = g. \qquad (1)$$

где $\tau = \dfrac{4\pi\rho R^2}{3\alpha} \approx \dfrac{4\times 3{,}14\times 10^3 \times 4\times 10^{-6}}{3\times 3{,}4\times 10^{-4}} \approx 49{,}3c$ -характерное время установления скорости (это будет видно из решения (1)).

Общее решение (1) имеет вид (сумма частного и однородного)

$$V = g\tau + A\exp(-t/\tau). \qquad (2)$$

Константу A находим из начального условия (считаем, что капля –неподвижна в начале падения) $V(0) = 0$ и получаем

$$V = g\tau(1 - \exp(-t/\tau)), \qquad (3)$$

откуда

$$V(t_0) = g\tau(1 - \exp(-t_0/\tau)) \approx 9{,}81 м/c^2 \times 49{,}3c \times (1 - \exp(-1/49{,}3)) \approx 9{,}71 м/c.$$

Переходя в (3) к пределу при $t \to \infty$, находим установившуюся скорость капли:

$$V_k = \lim(V(t) = \lim(g\tau(1 - \exp(-t/\tau))) = g\tau \approx 9{,}81 м/c^2 \times 49{,}3c \approx 483 м/c.$$

Ответ:
$V(t_0) = g\tau(1 - \exp(-t_0/\tau)) \approx 9{,}71 м/c, \quad V_k = g\tau \approx 483 м/c.$

Задача III-1.

Дано:
α=π/3,
k=0,01,
V_0=10м/с.
Найти:
H_m, T, $H_{об}$.

Решение

По теореме об изменении кинетической энергии имеем

$$\Delta T = T_к - T_н = A_{тр} - \Delta U. \qquad (1)$$

Для материальной точки:

$$T_к = 0, \quad T_н = \frac{mV_0^2}{2},$$
$$A_{тр} = kNL = -kmg\cos(\alpha)H_m/\sin(\alpha) = -kmgH_m ctg(\alpha), \quad \Delta U = mgH_m. \qquad (2)$$

Подставляем (2) в (1) и находим H_m:

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -kmgH_m ctg(\alpha) - mgH_m,$$

$$H_m = \frac{V_0^2}{2g(1 + kctg(\alpha))} \approx \frac{10^2}{2\times 9{,}81\times(1 + 0{,}01\times ctg(\pi/3))} \approx 5{,}07 м$$

Для обруча, используя теорему Кенига, имеем:

$$T_к = 0, \quad T_н = \frac{mV_0^2}{2} + \frac{Iw^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + \frac{mR^2(V_0/R)^2}{2} = mV_0^2,$$
$$A_{тр} = 0, \quad \Delta U = mgH_m. \qquad (3)$$

Подставляем (3) в (1) и находим $H_{об}$:

$$-mV_0^2 = -mgH_{об}, \quad H_{об} = \frac{V_0^2}{g} \approx \frac{10^2}{9{,}81} \approx 10{,}2 м.$$

Для нахождения времени подъема м.т. запишем второй закон Ньютона в проекции на направление, параллельное наклонной плоскости

$$ma = -mg\sin(\alpha) - kmg\cos(\alpha),$$

откуда следует, что вдоль наклонной плоскости точка движется равнозамедленно с ускорением

$$a = -g(\sin(\alpha) + k\cos(\alpha)). \qquad (4)$$

Время подъема находим из определения ускорения, как изменения скорости:

$$a = -g(\sin(\alpha) + k\cos(\alpha)) = \frac{V_k - V_n}{T} = \frac{0 - V_0}{T},$$

$$T = \frac{V_0}{g(\sin(\alpha) + k\cos(\alpha))} \approx \frac{10}{9{,}81 \times (\sin(\pi/3) + 0{,}01 \times \cos(\pi/3))} \approx 1{,}17c.$$

<u>Ответ:</u>

$$H_m = \frac{V_0^2}{2g(1 + kctg(\alpha))} \approx 5{,}07м, \quad H_{об} = \frac{V_0^2}{g} \approx 10{,}2м, \quad T = \frac{V_0}{g(\sin(\alpha) + k\cos(\alpha))} \approx 1{,}17c.$$

<u>Задача III-2.</u>

<u>Дано</u>:
α=π/3,
k=0,01,
V=100м/с,
M=10^3кг,
m=10кг
<u>Найти</u>:
L.

<u>Решение</u>

Из закона сохранения импульса, спроектированного на горизонтальное направление, находим скорость $V_П$ пушки после выстрела:

$$0 = mV\cos(\alpha) - MV_П,$$

$$V_П = \frac{m}{M}V\cos(\alpha). \qquad (1)$$

По теореме об изменении кинетической энергии, используя (1), получаем:

$$\Delta T = T_к - T_н = A_{тр},$$

$$0 - \frac{MV_П^2}{2} = -k\,Mg\,L,$$

$$L = \frac{V_П^2}{2kg} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{V^2}{2kg}\cos^2(\alpha) \approx \left(\frac{10}{10^3}\right)^2 \frac{10^4}{2 \times 0{,}01 \times 9{,}81}\cos^2(\pi/3) \approx 1{,}27м.$$

<u>Ответ:</u>

$$L = \frac{V_П^2}{2kg} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{V^2}{2kg}\cos^2(\alpha) \approx 1{,}27м.$$

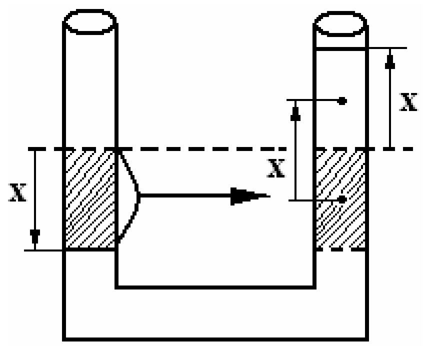
Задача III-3.

Дано:
L=1см.
Найти:
T.

Решение

Пусть смещение уровня в жидкости равно *x*. Тогда ее потенциальная энергия увеличилась, очевидно (смотри рисунок), на $\rho S xg \times x = \rho S g x^2$ (*S*-площадь сечения).

Если отсчитывать потенциальную энергию от неотклоненного уровня, то это увеличение и будет потенциальной энергией $U = \rho S x^2$.



Будем считать, что при колебаниях жидкости никаких внутренних течений в ней не возникает (что, конечно, ни так, но без этой идеализации задача выходит за рамки механики точки), и она движется как целое со скоростью $V = \dfrac{dx}{dt}$ смещения уровня. Кинетическая энергия при таком движении определяется соотношением $T = \dfrac{\rho SL}{2}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$.

Согласно закону сохранения полной механической энергии имеем:

$$T + U = const \qquad или \qquad \frac{\rho S L}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \rho S g x^2 = const. \tag{1}$$

Дифференцируя обе части (1) по времени, получаем уравнение движения (после сокращения на $\dfrac{dx}{dt}$):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{L}x = 0. \tag{2}$$

Сравнивая (2) с каноническим уравнением малых свободных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = 0.$$

находим, что

$$w^2 = \frac{2g}{L} \quad откуда \quad T = 2\pi / w = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}} \approx 2 \times 3{,}14 \times \sqrt{\frac{10^{-2}}{2 \times 9{,}81}} \approx 0{,}142c.$$

Ответ:

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{2g}} \approx 0{,}142c.$

*********ТВОРЧЕСКИХ УСПЕХОВ ВАМ!!!*********