



**КОРОЛЕВСКИЙ ИНСТИТУТ  
УПРАВЛЕНИЯ, ЭКОНОМИКИ И СОЦИОЛОГИИ**

Утверждаю  
Проректор по учебной работе КИУЭС  
В.В. Котрин

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2008 г.

**Кафедра математики и естественнонаучных дисциплин**

**ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ  
(курс лекций)**

***ЛЕКЦИИ НЕ ЗАВЕРШЕНЫ ПОКА ПОЛНОСТЬЮ ЛИШЬ  
I. ВВЕДЕНИЕ  
II. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ***

Королев – 2008

Острик А.В. Физические основы защиты информации: Курс лекций. - Королев: КИУЭС, 2008, ??? с.

Рецензенты: д. ф. - м. н. Ломоносов И.В.  
к.т.н. Грибанов В.М.

Предлагаемое учебное пособие представляет собой курс лекций, прочитанных студентам второго курса КИУЭС по специальностям 075500 "Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем" и 075200 "Компьютерная безопасность". Целью курса является изложение той части физических знаний, которые необходимы студентам для успешного усвоения последующих специальных курсов по защите информации и обеспечения возможности творческого решения конкретных задач в своей дальнейшей инженерной деятельности. Каждый раздел курса приблизительно соответствует материалу нескольких (от одной до трех) лекций. Автор надеется, что предлагаемый курс окажется также полезным и специалистам, уже работающим в сфере обеспечения защиты информации от ее утечки по техническим каналам в государственных и коммерческих структурах.

#### РЕКОМЕНДОВАНО

Учебно-методическим  
советом КИУЭС  
Протокол № 9 от 20 июня 2008 г.

Курс лекций рассмотрен и  
одобрен на заседании кафедры  
математики и естественнонаучных  
дисциплин.  
Протокол № 7 от 04.04.2008 г

Зав. кафедрой математики и  
естественнонаучных дисциплин  
д. ф. - м. н., профессор Борисов В.Ф.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

«Опять скажу:  
никто не обнимет необъятного!»  
Козьма Прутков

Целью настоящего курса лекций является изложение основ физических знаний, которые могут оказаться необходимыми при решении конкретных задач обеспечения защиты информации от утечки по техническим каналам. Утечка информации по техническим каналам реализуется посредством волновых процессов. Именно закономерности волновых процессов различной физической природы и являются основным предметом дальнейшего изучения. Однако все, кто пытался изложить кратко теорию волновых процессов, очень скоро убеждался в правильности известного афоризма Пруткова, вынесенного в эпиграф. При отборе материала на первое место, прежде всего, ставились его полезность, перспективность и общность применительно к решению задач защиты информации и вне зависимости от его ценности с физической точки зрения.

В соответствии с инженерной направленностью курса сущности и физического смыслу отдавалось предпочтение, быть может, в ущерб математической строгости. Тем не менее, в тех местах, где математический аппарат, по мнению автора, обладает общностью и несомненной полезностью при решении задач защиты информации, он излагается подробно, несмотря на уровень его сложности. В частности, это относится к методу комплексной амплитуды и набла - технике.

Следует отметить, что предмет физических основ защиты информации является относительно новым и не в полной мере сложившимся. Поэтому еще одна попытка на этом поприще представляется автору возможной и бесполезной. При работе над курсом автором использовались многочисленные источники физических знаний и часть материала, приведенного в работах [1-6].

Курс лекций читался студентам второго курса КИУЭС (группа ЗИ-02), уже знакомым с разделами физики в объеме курса [7], что, конечно, учитывалось при изложении материала.

Автор надеется, что учебное пособие окажется полезным не только студентам, но и специалистам, уже работающим в сфере обеспечения защиты информации от ее утечки по техническим каналам в государственных и коммерческих структурах. Он с интересом ждет отзывов, пожеланий, замечаний и предложений от всех, оказавших ему честь ознакомиться с предлагаемым курсом лекций.

Изучение настоящего учебного пособия по физическим основам защиты информации, конечно же, недостаточно для ее глубокого усвоения. Для более полного изучения рассматриваемых вопросов может оказаться полезной приводимая ниже литература.

## I. ВВЕДЕНИЕ

«Очень редко удается открыть  
несколько тайн природы  
одним и тем же ключом»  
*К. Шеннон*

«Энергия-царица мира,  
а энтропия ее тень».

Приведенное выше второе утверждение хорошо известно, но, вряд ли, может быть принято безоговорочно, как постулат. Совершенно понятно, что тень энтропии настолько неумолимо преследует и распоряжается энергией, что вопрос о том, кто из этих термодинамических параметров является царицей, остается весьма спорным. Одно - несомненно, что в мире, наполненном сложными самоорганизующимися системами, в отличие от мира простейших физических моделей, правят не энтропия с энергией, а осознанный во всей своей глубине лишь постнеклассической наукой феномен информации.

Роль информации для человечества менялась и по мере его развития. Если на этапе собирательства и охоты человек лишь потреблял готовые потоки вещества, энергии и энтропии, то с развитием сельского хозяйства и промышленности он занялся их интенсивным преобразованием. Однако и этот этап остался позади. На наших глазах в XXI век вместе с нами ворвались мобильные телефоны и Интернет, существенно преобразовав всю нашу жизнь. Вполне очевидно, что и то и другое есть лишь устройства, работающие с информационными потоками.

На современном этапе в постиндустриальном обществе большинство населения занимается переработкой информации. В экономически развитых странах в информационной сфере работают до 70% населения, тогда как в сельском хозяйстве и промышленности занято лишь 15%. Но если миром правят потоки информации, то тот, кто их контролирует, и является властелином мира. Проблема обеспечения защиты информации в этой связи становится приоритетной, как для государственных, так и для коммерческих структур.

### **1.1. Проблема информационной безопасности**

Развитие Интернета и других современных средств хранения, преобразования и обмена информацией привели к образованию мирового информационного пространства. Соответственно, на этом пространстве развернулась конкурентная борьба за доступ к информации и контроль над ней. Совершенно очевидно, что в мировое информационное пространство будут допущены в полном объеме только развитые страны, а без подключения к этому пространству государство ждет остановка экономического и социального развития. В то же время участие в глобальных информационных процессах невозможно без решения комплексной проблемы информационной безопасности, включающей как всестороннее и эффективное использование мирового информационного ресурса, так и защиту собственного информационного пространства. Актуальность проблемы обеспечения информационной безопасности возрастает и в связи с на-

блюдающимся ростом числа информационных атак, преследующих экономические и политические цели различных уровней.

Проблема информационной безопасности включает две связанные подпроблемы: защиту информации (от утраты, искажений, несанкционированного доступа к ней и использования) и защиту от информации (ложной, избыточной, нежелательной). Вопросы защиты от информации весьма сложны уже даже на этапе принятия решения о том, от чего следует защищаться. Мы будем заниматься лишь вопросами защиты информации.

В проблеме защиты информации можно выделить следующие взаимосвязанные аспекты: социальный, нормативно-правовой, экономический, финансовый, политический, военный, экологический, естественно-научный и технический. В сфере наших интересов будет в основном технический аспект.

Технический аспект защиты информации включает в себя, как защиту информации, циркулирующей в технических системах, так и защиту информации с помощью технических средств. Теория технической защиты информации является одной из наиболее развитой и на современном этапе позволяет решать вопросы о предельных уровнях обеспечения защиты и ее оптимизации.

Работа любых технических устройств неизбежно сопровождается появлением технических каналов утечки информации (каналов несанкционированного доступа к информации). Эти каналы могут порождаться необязательно информационными системами, но именно последние являются основным объектом нашего изучения.

Составной частью практически любой информационной системы являются технические средства (устройства, аппаратура) для добывания, извлечения, корректировки, передачи, приема, переработки и хранения информации. Функционирование информационных систем предполагает наличие информационных каналов, соединяющих источники информации с приемниками. Работу любой информационной системы также неизбежно сопровождает появление технических каналов утечки информации.

Важным классом информационных систем являются системы, распределенные в пространстве и называемые информационными сетями. В частности, к ним относятся сети связи и передачи данных.

## **1.2. Определение и характеристики информации**

Понятие «информация» является настолько общим и нетривиальным (не сводящимся к чему-то известному и определенному), что, вряд ли, стоит надеяться на возможность формулировки точного и общепризнанного определения этого феномена. Более разумным представляется считать информацию первичным понятием.

Тем не менее, в обычном быденном смысле под информацией понимают множество сведений, которые получает человек об окружающем мире (о физических и социальных процессах, других индивидуумах, о самом себе и т.д.). Ограниченность этого определения – очевидна: определение информации предполагает наличие разума, в данном случае человека.

С развитием кибернетики стало ясным огромное значение информационных процессов в обеспечении функционирования всего живого (от простейших

организмов до высших животных). Казалось, что, наконец, найдено кардинальное различие между живым и неживым и оно – «кибернетическое». Жизнь не мыслима без создания биологических структур, т.е. генерации упорядоченности (понижения энтропии), направляемой информацией. Предпосылками для реализации протекания информационных процессов является открытость и сильная неравновесность любых живых систем. Поскольку живые системы вопреки законам термодинамики самопроизвольно понижают энтропию (повышают упорядоченность), то они являются самоорганизующимися.

Однако с развитием теории самоорганизации (синергетики) оказалось, что самоорганизация не является характерной чертой лишь живых систем. При этом было бы абсурдным предположить, что в живых организмах она направляется информационными потоками, а в неживой природе – чем-то иным. Становится ясным, что определение информации, как множества сведений, получаемых человеком или передаваемых от одной части живой системы к другой, весьма ограничено.

В том случае, когда понятие является первичным, оказываются полезным постулирование его свойств (так, например, поступают в механике, не определяя феномен «пространство-время», а перечисляя его свойства). К свойствам, очевидно, могут быть отнесены и способы наблюдения и получения описываемых феноменов. Одна из наиболее содержательных формулировок способа создания (генерации) информации, применимая к любым самоорганизующимся системам, дана Генри Кастлером: **информация есть случайный запоминаемый выбор варианта из многих возможных и равноправных**. Таким образом, в своей формулировке Г. Кастлер отождествляет способ получения информации с самим феноменом информации. При этом информация становится процессом (ее генерацией), что порождает ряд парадоксов, уже встречающихся в философской литературе. С другой стороны таким отождествлением Г. Кастлер подчеркивает важность этого свойства, как основного, отличающего информацию от других понятий. Согласно определению, для того, чтобы выбор варианта генерировал информацию необходимо выполнение трех критериев, он должен быть:

1. случайным;
2. совершаемым из многих возможных и равноправных (вообще говоря, не равновероятных!) вариантов;
3. запоминаемым.

Все перечисленные критерии, в той или иной степени, противоречат классическим физическим воззрениям и неудивительно, что лишь постнеклассическая наука подошла к некоторому пониманию феномена информации.

Фактор случайности имеет место в классической физике, но лишь на микроуровне, а в определении Кастлера этого не предполагается.

Возможность предоставления свободы выбора не согласуется с логикой ньютоновской механики (лапласовского детерминизма). В классической механике отсутствуют задачи с реализацией движений по равноправно возможным вариантам (буриданов осел с фанатизмом классического детерминизма такие

задачи решать не может). Если, тем не менее, таким задачи формулировать, то выбора в рамках классической механики не произойдет.

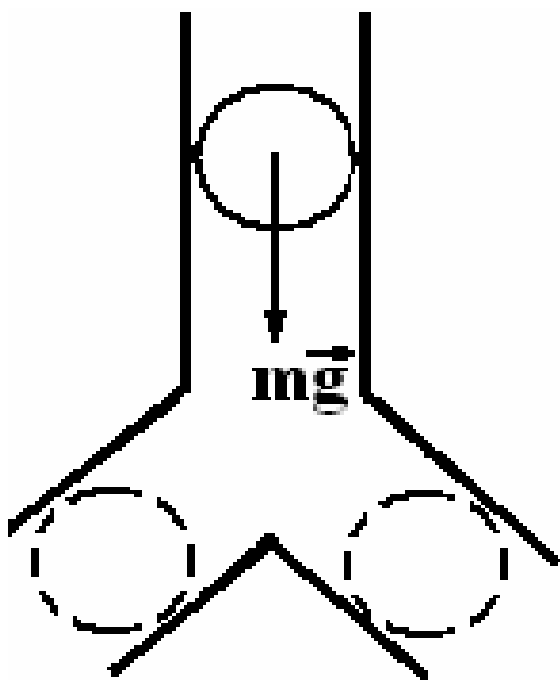


Рис. 1.1. Неклассическая задача в классической механике

Например, в задаче на рис. 1.1 шарик в разветвляющемся желобе не станет скапывать вправо или влево (это противоречило бы, что задание начальных условий и полей сил однозначно определяют последующее движение) по равноправным каналам, а будет, сталкиваясь с острием, многократно подпрыгивать (классическая механика при этом спасена, но мир останется однозначным, скучным и без права выбора, а значит и без информации и самоорганизации). Однако следует отметить, что и в рамках классической механики ставились вопросы об устойчивости механических систем (в частности, еще Эйлером об устойчивости стержня), в которых делался выбор между устойчивым и неустойчивым поведением в точках ветвления решений (точках бифуркаций). В нашем примере, в конце концов, движение затухнет (это уже не механика, а термодинамика, т.к. механическая энергия перейдет в тепло) и положение шарика на острие станет неустойчивым, т.е. ему все равно придется сделать выбор.

Запоминание выбора, так далеко от классических подходов в науке, что, вряд ли, стоит останавливаться на этом. Просто такие вопросы ранее не ставились при исследованиях физических явлений. Требование запоминания выбора соответствует его фиксируемости, т.е. отражения нематериальной информации (сделанного выбора) на материальном носителе.

В философском плане генерация информации - это событие, синтезирующее случай и необходимость, поскольку случайный выбор в момент этой генерации делается из равноправных вариантов, разрешенных природой (необходимых). Этим информация похожа на энтропию, которая, будучи определенная через возможные, случайно реализующиеся микросостояния термодинамической системы, на макроуровне с необходимостью определяет ее поведение.

Информация делится на условную и безусловную. **Условная информация базируется на некотором коде, определяющем соответствие между символами и реальными предметами.** Условность информации при разработке кода людьми (азбука Морзе, алфавит, словарный запас языка) очевидна. Само появление языка есть генерация условной информации (о том, что это случайный выбор, свидетельствует множественность языков - более трех тысяч). Следует отметить, что создание логической кодовой условной информации не есть прерогатива лишь общественных животных (не есть результат общественной деятельности, в котором необходимо общение - обмен информацией). Условная генетическая информация создана природой задолго до воз-

возможности каких-либо общественных отношений. Это весьма жесткий, защищенный (любое его изменение приводит к летальному исходу) язык с застывшим словарем. В отличие от обычных языков он имеет единственный генетический код для всех живых существ и возникает вопрос о случайности выбора, т.е. была ли генерация информации в процессе эволюции или этот код был привнесен извне. Отсутствие других кодов, скорее всего, говорит в пользу последнего. Но, быть может, в силу жесткости языка все альтернативы просто не выдержали конкуренции на этапе доархеологического периода.

**Безусловной** является информация о реально происходящих событиях (не возникающая случайно, а извлекаемая (фиксируемая) из окружающей действительности) или генерирующаяся в процессах самоорганизации. Уже само определение безусловной информации настолько условно, что вполне понятна невозможность во многих случаях разделить, что в получаемой составной информации следует отнести к условной, а что к безусловной. Так содержание в доказательствах теорем безусловной информации (их нельзя получить строго формализованным путем) делает их иногда очень трудными (часть безусловной информации генерируется при доказательстве в моменты озарений). В то же время отделить в доказательстве условную информацию от безусловной практически невозможно.

**Количество информации.** Входящее в определение генерации информации условие случайности выбора позволяет получить количественную статистическую оценку количества информации и выбрать единицу ее измерения. Пусть случайный выбор совершается между  $m$  вариантами, имеющими вероятности  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Тогда по формуле, предложенной К. Шенноном, количество информации  $I$  равняется

$$I = - \sum_{i=1}^{i=m} P_i \log_2(P_i), \quad \sum_{i=1}^{i=m} P_i = 1. \quad (1.1)$$

Знак минус обеспечивает положительность количества информации, поскольку в (1.1)  $\log_2(P_i) \leq 0$ , т.к. все  $P_i \leq 1$ .

Применим формулу (1.1) к генерации минимального количества информации, заключающейся в случайном выборе «орел - решка». В этом случае ( $m=2$ ):

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}, \quad I = -(P_1 \log_2(P_1) + P_2 \log_2(P_2)) = -2 \times \frac{1}{2} \times \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Это минимальное количество информации соответствует единице информации, получившей название бит. Таким образом, при бросании монетки генерируется информация в один бит.

Формула (1.1) была получена К. Шенноном применительно к оценке количества информации, которое передают сигналы, соответствующие буквам алфавита, по каналу связи. Применительно к этому случаю  $m$  – число букв алфавита,  $P_i$  - вероятность появления  $i^{\text{ой}}$  буквы слова языка, на котором передается информация. Многократные попытки обобщения этой формулы на все виды языков и используемых символов и, тем более, применения ее к различным об-



ластям человеческой деятельности, далеких от передачи слов по каналам связи, сталкиваются с явными трудностями.

Во-первых, совокупность элементов сообщений отождествляется с информацией без анализа семантики этого сообщения. Если переставить буквы в разумном сообщении, то согласно (1.1) количество информации останется тем же, но оно станет бессмысленным, т.е. информация в значительной мере (не совсем, так как ее можно восстановить перебором всех перестановок букв перед взором экспертов; конечно, восстановить, вообще говоря, неоднозначно) утратится. Поэтому по предложению В. Корогодина под шенноновской оценкой количества информации (1.1) целесообразно понимать меру «информационной тары», которая способна вместить оцененное количество информации, но может оказаться и пустой. Таким образом, если текст сообщения с количеством информации  $I$  абсолютно компактен, то он исчерпывает предоставленную ему тару и оказывается равным шенноновской оценке  $I_{sh}$ . Однако, в общем случае, мы имеем  $I < I_{sh}$  и надеяться на близость этих величин было бы, по крайней мере, наивным.

Во-вторых, оказываются несопоставимыми оценки количества информации, передаваемыми различными совокупностями символов (например, при использовании различных языков), поскольку в общем случае неизвестно, как изменяется количество информации при переходе от одной системы записи к другой (а то, что при переводе с русского на английский количество информации уменьшается, вряд ли, у кого вызовет сомнение, поскольку русский язык, несомненно, обладает большим числом оттенков и слов для их передачи).

Значительные успехи, полученные при применении формулы Шеннона по назначению, стали причиной стремления расширить сферу применимости (1.1) для оценки количества информации (хотя, как уже мы знаем, даже там, где она работает, оценивается лишь емкость информационной тары) при любых событиях, а не только при передаче по линиям связи сообщений на фиксированном языке. Обоснованием такого стремления служат туманные соображения о том, что если информация является общим свойством материи, то ее характеристики, полученные строго в одной области, скорее всего, могут быть применены и в другой. Однако при таких применениях получаются чрезвычайно абсурдные выводы и утверждение В. Корогодина о том, что «вероятностное определение количества информации, перенесенное из математической теории связи в обобщенную теорию информации, теряет свою эвристичность» [6], само представляется весьма эвристичным. Лучше и раньше других это понимал сам К. Шеннон (см. эпиграф к данному разделу), призывая не поддаваться магии слов энтропия и информация при решении всех нерешенных проблем.

**Качество информации.** Качество информации связано с иерархической структурой ее генерации (рис. 1.2). По определению, единичный акт получения информации есть случайный выбор между равноправными вариантами. Равноправные варианты – это варианты одного иерархического уровня, одного качества. Дальнейшая наработка информации возможна, если вариант выбора оказался удачным, т.е. обеспечивающим возможность следующего акта генерации. В случае успеха опять реализуется выбор среди равноправных вариантов, но

нового качества (уровня) и т.д. Это дает возможность говорить об информации различного качества, если она получена случайным выбором вариантов на различных иерархических уровнях.

Таким образом, равноправность вариантов предполагает их принадлежность к одному и тому же иерархическому уровню генерации информации. Информации, полученные на различных уровнях, хоть и отличаются качественно друг от друга, но оказываются взаимосвязанными, поскольку для генерации информации более высокого уровня совершенно необходима информация

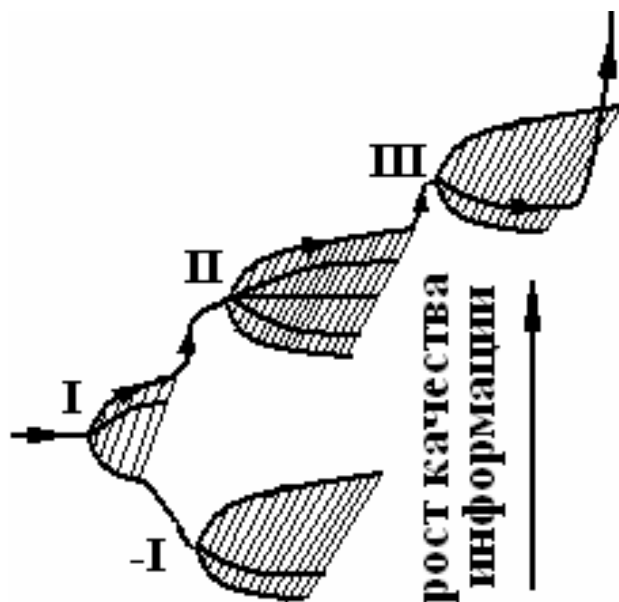


Рис.1.2. Иерархическая структура генерации информации

нижних уровней. Если нет информации о городе, то выбор улицы и квартиры, вряд ли, приведет к получению требуемой информации (где ночевать?), как это имело место в известном новогоднем фильме «С легким паром». **Информация более низкого уровня, необходимая для генерации или рецепции (усвоения) информации на верхнем уровне называется тезаурусом.** Следовательно, генерация качественно новой информации невозможна без обладания соответствующим тезаурусом.

**Ценность и эффективность информации. Ценность информации определяется степенью ее полезности для достижения выбранной**

(этот выбор тоже, вообще говоря, случаен, т.к. делается на основе накопления информации, а она по определению генерируется последовательностью случайных выборов) **цели.** Любая математическая теория информации, игнорирующая ее содержание, не в состоянии ввести меру ценности. Так теория К. Шеннона говорит о пропускной способности канала связи, не анализируя содержания телеграмм, а единственная телеграмма, для которой нужен всего лишь миг работы этого канала, может перевернуть всю жизнь, если в ней сообщается что-то мешающее достижению ваших сокровенных целей.

Понятие ценности информации совершенно необходимо в биологии. Если, например, перед вами стоит цель клонирования льва, то, очевидно, что для вас одна его клетка, содержащая полную информацию об этом звере, ценнее всей остальной биосферы, и вопрос о емкости и заполненности информационной тары не имеет смысла (получив информацию обо всех остальных животных любой степени детальности, вы не приблизитесь ко льву ни на шаг).

В отличие от количества информации по Шеннону, ценность информации может быть оценена только по результатам ее рецепции (усвоения). Например, у вас имеется информация о конструкции нашей баллистической ракеты «Тополь». Какова ее ценность? Для стран Африки практически нулевая, т.к. они не

обладают достаточным уровнем рецепции (наличием квалифицированных специалистов и современных технологий) этой информации. Для Китая ценность

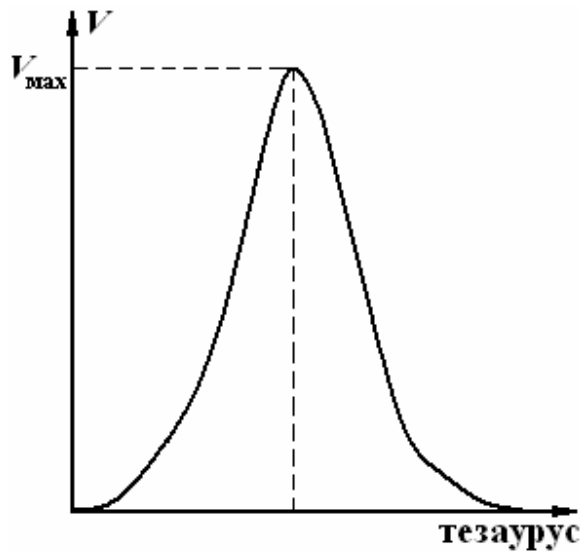


Рис. 1.3. Ценность информации в зависимости от тезауруса

максимальная, т.к. их уровень рецепции от нас отстает несильно, а стратегические цели направлены на обладание ракетами такого уровня. Для США ценность тоже нулевая, т.к. в этой стране имеются соответствующие аналоги. Таким образом, зависимость ценности информации от уровня подготовки к ее усвоению (располагаемого запаса информации; запас может быть локализован и в головах специалистов и в наработанных технологиях) - тезауруса – имеет максимум, как это показано на рис. 1.3.

Если возможность достижения цели допускает вероятностную оценку, то количественные определения ценности информации  $V$  основываются на сравнении вероятности достижения цели до рецепции информации  $p$  и после  $P$ .

В качестве меры ценности М.М. Бонгартом и А.А. Харкевичем предложена величина

Если возможность достижения цели допускает вероятностную оценку, то количественные определения ценности информации  $V$  основываются на сравнении вероятности достижения цели до рецепции информации  $p$  и после  $P$ .

$$V = \log_2 \frac{P}{p}. \quad (1.2)$$

Пределы изменения так определенной меры от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Мерой ценности информации по В.И. Корогодину является значение [6]

$$V = \frac{P - p}{1 - p}. \quad (1.3)$$

При этом ценность информации  $V$  меняется от 0 до 1.

Очевидно, что ценность информации – многомерная величина (не задается одним числом) и лишь в простейших модельных случаях может описываться одним числом (например, при фиксированной паре «источник информации - рецептор»).

Ценность информации зависит от ее усвоенного количества. Так, после окончания школы ценность начал математического анализа, изучаемых в старших классах, практически нулевая, т.к. в повседневной жизни не используется. Однако с добавлением информации по естественно - научным дисциплинам в институте ценность существенно возрастает, поскольку практически ни одна задача по физике или теоретической механике не может быть решена без начальных навыков в дифференцировании и интегрировании, а их детальное изучение в рамках предметов по высшей математике завершается лишь к концу первого курса. Поэтому в области малых значений количества информации  $I$  скорость роста ценности  $V$  мала. Стремится к нулю и скорость роста ценности при больших значениях количества информации (эффект насыщения; в приведенном примере важно умение дифференцировать и интегрировать, а большая

часть последующего материала, излагаемого в курсах высшей математике используется существенно реже). Таким образом, зависимость ценности информации от ее усвоенного количества имеет вид, показанный на рис. 1.4 (сплошная кривая с насыщением и нулевой производной в начале координат).

Эффективность информации  $E$  определяется приращением ценности на единице усвоенной информации, т.е. производной рассмотренной ранее зависимости  $V = V(I)$  [5]

$$E = \frac{dV}{dI}. \quad (1.4)$$

Легко видеть, что в соответствии со сплошной кривой на рис. 1.4 зависимость  $E = E(I)$  представляет собой кривую с единственным максимумом, как это показано на рис. 1.4 пунктирной линией.

### 1.3. Информационные угрозы и атаки. Технические каналы утечки информации

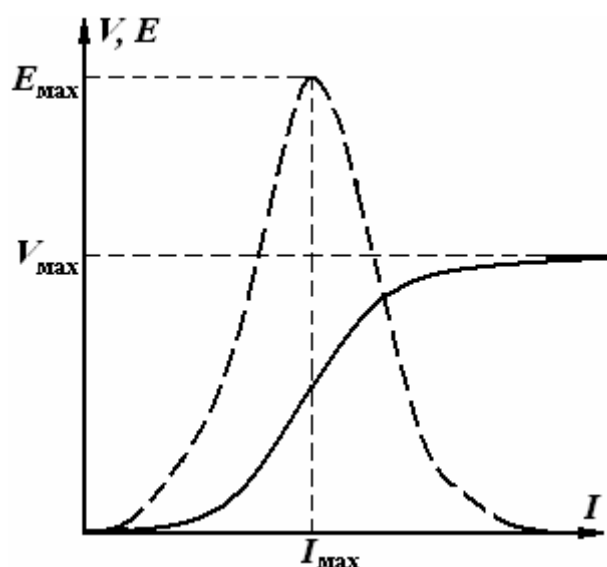


Рис. 1.4. Ценность  $V$  и эффективность  $E$  информации в зависимости от ее количества  $I$

**Информационные угрозы** – это возможность возникновения ситуации, следствием которой может стать нарушение безопасности информации. Они классифицируются по следующим критериям: по характеру (случайные и преднамеренные); по локализации источника (внутренние и внешние); по отношению к процессу обработки информации (зависят или не зависят от процесса обработки информации); по цели реализации угрозы (нарушение конфиденциальности, искажении, уничтожение, прекращение или ограничение доступа). Причиной случайных угроз являются физические воздействия стихийных природных явлений.

К случайным угрозам относят также непреднамеренные ошибки обслуживающего персонала.

В отличие от случайных угроз множество преднамеренных угроз, вызываемых человеческой деятельностью, более представительно и опасно. Наиболее распространены следующие преднамеренные угрозы [4]: несанкционированный доступ к конфиденциальной части информации посторонних лиц; доступ легальных пользователей информационной системы к закрытой для них части информации; несанкционированное копирование программ и данных; кража физических носителей и оборудования, приводящая к утрате информации; умышленное уничтожение информации; несанкционированная модификация документов и баз данных; фальсификация сообщений, передаваемых по каналам связи; отказ от авторства сообщения, передаваемого по каналам связи; отказ от факта получения информации; дезинформация (навязывание ложного

сообщения); разрушение информации деструктивными программами типа компьютерных вирусов.

**Попытка реализации угроз безопасности называется информационной атакой. Атаки, предпринимаемые злоумышленниками, находящимися вне информационной системы (например, через интернет) называются удаленными.** По характеру воздействия удаленные атаки делятся на пассивные (не оказывающие влияния на работу информационной системы) и активные (проявляющие себя влиянием на работу информационной системы). Активные атаки по сравнению с пассивными отличаются принципиальной возможностью их обнаружения. Условно-пассивными называют атаки, цель которых заключается в подготовке активной атаки (компьютерная разведка и взлом системы защиты информации).

**Несанкционированный доступ – наиболее распространенный вид информационных атак.** Его цель состоит в расширении возможностей работы с информационной системой в сторону нарушения правил разграничения доступа, установленных в организации для обеспечения безопасности информации. Следствием несанкционированного доступа является перехват (утечка) информации (получения доступа без возможности ее модификации) и (или) ее искажение. Возможность искажения информации реализуется при частичном или полном контроле над информационным обменом между подсистемами информационной системы.

Принципиально другой целью атак может быть нарушение работоспособности элементов информационной системы. В этом случае не предполагается получение атакующим несанкционированного доступа к информации, а ставится задача нарушить нормальное функционирование аппаратных и программных средств информационной системы. Выполнимой и часто реализуемой оказывается менее глобальная цель, заключающаяся во временном воспрепятствовании (ограничении) доступа к ресурсу атакуемого объекта (например, одновременным обращением к этому ресурсу большого числа пользователей-злоумышленников; увеличение числа таких пользователей может осуществляться и программными средствами).

Любая утечка информации предполагает ее перенос в пространстве (будучи записанной на некотором носителе) от источника к несанкционированному получателю. **Путь переноса информации называется каналом утечки. Каналы утечки, в которых несанкционированный перенос информации осуществляется полями различной физической природы, относят к техническим.**

Технические каналы утечки различаются: по физической природе носителя (материально-вещественный, акустический, электромагнитный, оптический, геофизический); по информативности (информативные и малоинформативные); по времени функционирования (постоянные, эпизодические, случайные); по структуре канала (одноканальные, составные).

Как известно, однородные поля (постоянные, плоские монохроматические волны и т.д.) не являются носителями информации. Лишь модулированные в пространстве и времени возмущения полей физических величин могут содер-

жать информацию. Поэтому носителем информации в технических каналах являются возмущения полей физических величин. Распространение таких возмущений (перенос информации, в частности, ее утечка) в физике называют волновыми процессами. Именно **закономерности волновых процессов различной физической природы и будут являться основным предметом нашего дальнейшего изучения.**

## **II. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ**

«Колышется море; волна за волной  
Бегут и шумят торопливо...»

*А. Толстой*

«Дума за думой, волна за волной -  
Два проявления стихии одной...»

*Ф. Тютчев*

Ни у кого не вызывает сомнений глубокая общность колебательных и волновых процессов вне зависимости от их конкретной природы. Более того, изучение колебательных процессов с необходимостью должно предшествовать рассмотрению волн, поскольку любую среду можно модельно представить как совокупность осцилляторов, а распространение возмущений в такой среде, как направленный обмен энергией между ними. Физическая общность колебательных процессов позволяет получать для их описания канонические уравнения, т.е. такие уравнения, которые оказываются инвариантными относительно природы процесса. Поэтому при рассмотрении колебаний мы будем параллельно выводить соотношения для механических и электрических систем (в частности, это возможно в силу хорошо известной электромеханической аналогии), завершая эти выводы каноническими уравнениями, справедливыми уже для обоих (и многих других) вариантов рассмотрения.

Далее рассматриваются линейные модели колебательных и волновых процессов, имеющие наибольшее прикладное значение. Для этих моделей справедлив принцип суперпозиции (аддитивное воздействие приводит к соответствующему аддитивному отклику), и они наиболее разработаны в математическом отношении.

### **2.1. Собственные колебания**

Одним из наиболее распространенных типов колебательных процессов в физических системах являются малые собственные (свободные) колебания вблизи устойчивого положения равновесия. Собственные колебания реализуются в колебательных системах, когда подвод энергии, требующейся для колебаний, осуществляется лишь на начальном кратковременном этапе возмущения равновесного состояния системы.

Как уже отмечалось, несмотря на все разнообразие колебательных процессов, малые колебания одномерных систем (систем, состояние которых задается одной переменной) описываются уравнением одного и того же вида. Выведем его для двух конкретных систем.

### Механический осциллятор

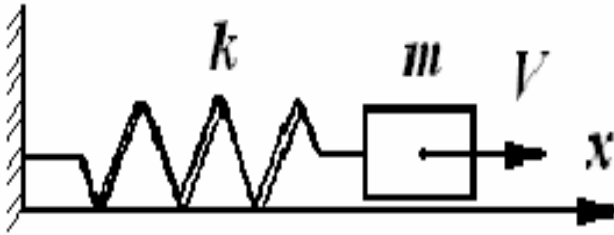


Рис. 2.1. Грузик на пружинке

Рассмотрим грузик массой  $m$  на гладкой плоскости, скрепленный с пружинкой жесткостью  $k$ . Дифференцируя по времени закон сохранения полной механической энергии для этой системы

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const,$$

получаем  $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ , откуда, вводя  $\omega = \sqrt{k/m}$ , приходим к уравнения малых свободных колебаний грузика на пружинке

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (2.1)$$

где  $x$ -смещение грузика от положения равновесия;  $V = dx/dt$  - скорость грузика;

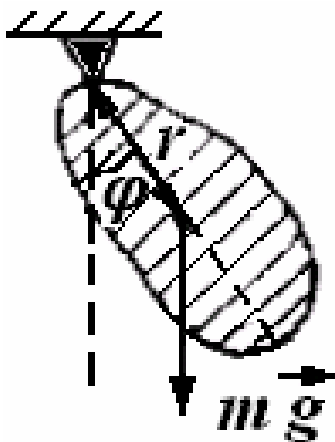


Рис. 2.3. Физический маятник

Рассмотрим теперь физический маятник – тело, колеблющееся вокруг неподвижной оси, параллельной земной поверхности (см. рис.). Записывая динамическое уравнение для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси,

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgr \sin(\varphi),$$

получаем при малых  $\varphi$ , когда  $\sin(\varphi) \cong \varphi$ , следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (2.3)$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{mgr}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$  – круговая частота колебаний;  $l = \frac{J}{mr}$  – приведенная длина физического маятника.

Сравнивая уравнения (2.1)-(2.3), видим, что они одного вида, но записаны относительно разных ис-

### Электрический осциллятор

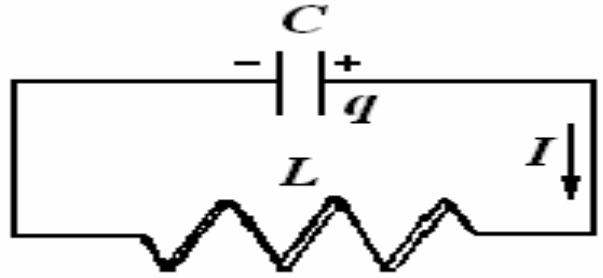


Рис. 2.2. Колебательный контур

Рассмотрим простейший колебательный контур без сопротивления с индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$ . Дифференцируя по времени закон сохранения энергии для этой системы

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = const,$$

получаем  $L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$ , откуда, вводя  $\omega = \sqrt{1/LC}$ , приходим к уравнения малых свободных колебаний заряда конденсатора

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0, \quad (2.2)$$

где  $q$  - заряд конденсатора;  $I = dq/dt$  - ток в контуре;

комых функций времени ( $x(t), q(t), \varphi(t)$ ). Обозначая все эти функции через единую переменную  $\xi$  получаем каноническое уравнение малых свободных колебаний ( $w^2 = \tilde{k} / \tilde{m}$ )

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + w^2 \xi = 0. \quad (2.4)$$

Итак, для изучения малых свободных колебаний одномерных систем достаточно рассмотреть решения уравнения вида (2.4). Как легко проверить непосредственной подстановкой, общее решение этого дифференциального уравнения записывается в виде

$$\xi = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.5)$$

где постоянные  $A$  и  $\varphi_0$  определяются из начальных условий. Постоянная  $A$  называется амплитудой,  $\varphi_0$  – начальной фазой колебаний, а  $w$  – круговой (или циклической) частотой колебаний. Из (2.5) следует, что вблизи положения равновесия малые колебания являются гармоническими, т.е. описываются гармоническими функциями вида:

$$\xi = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad \xi = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Поэтому и колебательную систему, описываемую каноническим уравнением (2.4), принято называть **гармоническим осциллятором**.

Поскольку период функции  $\cos(\varphi)$  равен  $2\pi$ , то период колебаний, совершаемых по закону  $\xi = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , определяется из соотношения

$$T = 2\pi / \omega, \quad (2.6)$$

откуда для грузика на пружинке, физического маятника и колебательного контура имеем, соответственно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad T = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (2.7)$$

Для любых других одномерных систем период малых гармонических колебаний находят аналогично: сначала приводят динамическое уравнение к каноническому виду (2.4), а затем определяют из него  $w$  и используют соотношение (2.6). Применяется и другой метод нахождения периода  $T$ , основанный на равенстве при колебательных процессах максимальных значений инерционных (кинетических) и потенциальных энергий  $E_{k \max} = E_{p \max}$ . Это равенство следует из закона сохранения суммарной энергии  $E_k + E_p = \text{const}$ , выполнения неравенств  $E_k \geq 0$ ,  $E_p \geq 0$  и существования таких состояний системы, когда  $E_k$  или  $E_p$  равны нулю (для обеспечения выполнения неравенства  $E_p \geq 0$  необходимо за начало отсчета потенциальной энергии принять потенциальную энергию системы в положении равновесия).

*Пример 2.1. В качестве примера определим энергетическим методом период колебаний грузика на пружинке:*

$$E_{k \max} = \max_t \left( \frac{m \dot{x}^2}{2} \right) = \max_t \left( \frac{m \omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0) \right) = \frac{m \omega^2 A^2}{2},$$



$$E_{p \max} = \max_t \left( \frac{kx^2}{2} \right) = \max_t \left( \frac{kA^2}{2} \cos^2 (wt + \varphi_0) \right) = \frac{kA^2}{2}.$$

Поскольку  $E_{k \max} = E_{p \max}$ , то получаем  $\frac{mw^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$ , откуда  $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$  и, согласно

$$(2.6), T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \text{ что, конечно, совпадает с (2.7).}$$

Найдем суммарную энергию гармонического осциллятора, используя (2.5) и соотношение  $\tilde{w}^2 = \tilde{k} / \tilde{m}$  (величины с волной сверху введены так, что это соотношение выполняется):

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{\tilde{m}}{2} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{\tilde{m}w^2 A^2}{2} \sin^2 (wt + \varphi_0), \\ E_p &= \frac{\tilde{k} \xi^2}{2} = \frac{\tilde{k} A^2}{2} \cos^2 (wt + \varphi_0) = \frac{\tilde{m}w^2 A^2}{2} \cos^2 (wt + \varphi_0), \\ E = E_k + E_p &= \frac{\tilde{m}w^2 A^2}{2} (\sin^2 (wt + \varphi_0) + \cos^2 (wt + \varphi_0)) = \frac{\tilde{m}w^2 A^2}{2} = \frac{\tilde{k} A^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь и далее величинами с волной сверху обозначаются аналоги соответствующих величин для механического осциллятора. Так  $\tilde{m} = m, J, L$ ;  $\tilde{k} = k, mgr, 1/C$ ;  $\tilde{p} = mV, JW, LI$ , соответственно, для грузика на пружинке, физического маятника и колебательного контура (см. таб. 2.1). При выводе (2.8) использовалось соотношение  $\tilde{w}^2 = \tilde{k} / \tilde{m}$  (легко проверить, что величины с волной сверху введены так, что это соотношение выполняется).

Следовательно, полная энергия колебаний пропорциональна квадратам амплитуды и частоты. Согласно закону сохранения энергии ( $E = const$ ), получаем  $\frac{\tilde{k} A^2}{2} = const$  или  $A = const$ , т.е. при свободных колебаниях системы амплитуда не изменяется. Последнее справедливо, если в системе не действуют непотенциальные силы типа трения.

Из (2.8) следуют выражения для энергий в зависимости от характеристики состояния системы  $\xi$ :

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{\tilde{m}}{2} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{\tilde{m}w^2 A^2}{2} \sin^2 (wt + \varphi_0) = E (1 - \cos^2 (wt + \varphi_0)) = E \left( 1 - \left( \frac{\xi}{A} \right)^2 \right), \\ E_p &= \frac{\tilde{k} \xi^2}{2} = \frac{\tilde{k} A^2}{2} \cos^2 (wt + \varphi_0) = E \cos^2 (wt + \varphi_0) = E \left( \frac{\xi}{A} \right)^2. \end{aligned}$$

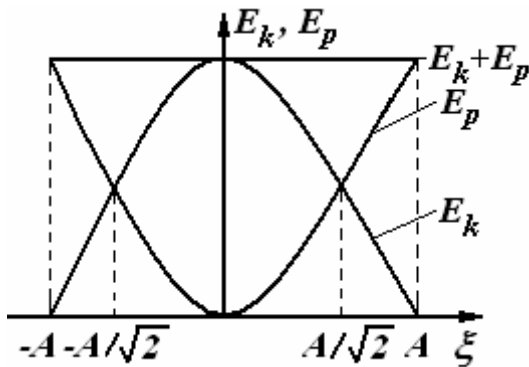


Рис. 2.4. Баланс энергий в осцилляторе

Эти квадратичные по  $\xi$  зависимости представлены на рис. 2.4. Видно, что изменение энергий происходит в полном соответствии с законом сохранения суммарной энергии колеблющейся системы.

Изучение гармонического осциллятора часто удобно проводить в фазовой плоскости, одной из координат которой является характеристика отклонения от положения равновесия (смещение)  $\xi$ , а другой — величина пропорциональная скорости изменения этой ха-

рактеристики (импульс гармонического осциллятора)  $\tilde{p}$ .

Каждому значению  $\xi$  соответствует некоторое значение  $\tilde{p}$ . Множество значений  $(\xi, \tilde{p})$  образует траекторию движения в фазовом пространстве. Найдем ее уравнение этой траектории для гармонического маятника. Используя (2.5), находим импульс гармонического осциллятора

$$\tilde{p} = \tilde{m} \frac{d\xi}{dt} = -\tilde{m}A\omega \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.9)$$

Представим уравнения (2.5) и (2.9) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{A} &= \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \frac{\tilde{p}}{\tilde{m}A\omega} &= -\sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Возведя их в квадрат и сложив, получаем уравнение эллипса

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\tilde{p}^2}{\tilde{m}^2 A^2 \omega^2} = 1 \quad (2.10)$$

с полуосями  $a = A$  и  $b = \tilde{m}A\omega$ .

Таким образом, точка, изображающая систему в фазовом пространстве, в процессе движения гармонического осциллятора описывает эллипс, который и является ее фазовой траекторией. Так как площадь эллипса равна  $\pi ab$ , то площадь, ограниченная этой траекторией  $S$ , вычисляется по формуле:

$$S = \pi A(\tilde{m}A\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\tilde{m}A^2 \omega^2}{2}.$$

Так как  $\tilde{m}A^2 \omega^2 / 2$  есть полная энергия осциллятора  $E$ , то, вводя собственную частоту свободных колебаний осциллятора  $\nu = \omega / 2\pi$ , можно записать площадь эллипса в виде  $S = E / \nu$ .

Поскольку площадь, ограниченная любой замкнутой кривой, вычисляется с помощью интеграла вдоль этой кривой, то и в случае эллипса имеем  $S = \oint \tilde{p} d\xi$ , откуда

$$\oint \tilde{p} d\xi = \frac{E}{\nu}. \quad (2.11)$$

Можно показать, что величина  $\oint \tilde{p} d\xi$  является адиабатическим инвариантом, т.е. она не меняется при достаточно медленных изменениях (малых возмущениях) колебательной системы и, следовательно, энергия в этом случае должна быть пропорциональна частоте. Этот вывод и соотношение (2.11) играют важную роль в квантовой механике.

Рассмотрим теперь собственные колебания, сопровождающиеся диссипацией энергии, обусловленной работой сил трения. Как и ранее, выведем каноническое уравнение для одномерных колебаний с трением для двух простейших механических и электрических систем (в эти системы теперь добавлены элементы, обеспечивающие диссипацию энергии).

### Механический осциллятор

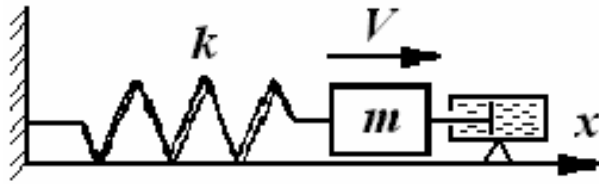


Рис. 2.5. Грузик на пружинке с трением

Рассмотрим грузик массой  $m$  на гладкой плоскости, скрепленный с пружинкой жесткостью  $k$  и элементом вязкого трения с силой пропорциональной скорости. Теорема об изменении суммарной энергии для этой системы записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = -\alpha V^2,$$

Дифференцируя и вводя обозначения  $w = \sqrt{k/m}$ ,  $2\beta = \alpha/m$ , получаем уравнение малых собственных колебаний грузика на пружинке с трением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + w^2x = 0. \quad (2.12)$$

Сравнивая уравнения (2.12), (2.13), опять видим, что они одного вида, но записаны относительно разных искомых функций времени ( $x(t)$ ,  $q(t)$ ). Обозначая все эти функции через единую переменную  $\xi$  получаем каноническое уравнение малых собственных колебаний с трением ( $2\beta = \tilde{\alpha}/\tilde{m}$ )

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\xi}{dt} + w^2\xi = 0. \quad (2.14)$$

Также из вывода следует, что  $\tilde{\alpha} = \alpha, R$ , соответственно, для грузика на пружинке и колебательного контура (см. таб. 1).

Решением уравнения (2.14) при не очень большом затухании ( $\beta < w$ ) является функция

$$\xi = A \exp(-\beta t) \cos(\bar{w}t + \varphi) \quad (2.15)$$

с круговой частотой колебаний

$$\bar{w} = w \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{w^2}} \quad (2.16)$$

и экспоненциально затухающей амплитудой.

### Электрический осциллятор

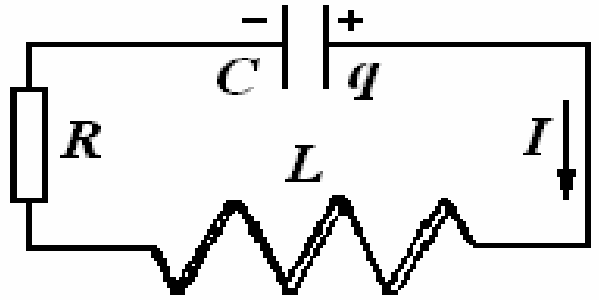


Рис. 2.6. Колебательный контур с сопротивлением

Рассмотрим простейший колебательный контур с сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$ . Теорема об изменении суммарной энергии для этой системы записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = -RI^2.$$

Дифференцируя и вводя обозначения  $w = \sqrt{1/LC}$ ,  $2\beta = R/L$ , получаем уравнение малых собственных колебаний заряда конденсатора в колебательном контуре с сопротивлением

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + w^2q = 0. \quad (2.13)$$

Таблица 2.1. Соответствие физических величин для различных колебательных систем			
гармонический осциллятор	грузик	маятник	контур
характеристика состояния, $\xi$	$x$	$\varphi$	$q$
скорость $\tilde{V} = d\xi / dt$	$V = dx / dt$	$W = d\varphi / dt$	$I = dq / dt$
ускорение $\tilde{a} = d\tilde{V} / dt = d^2\xi / dt^2$	$a = dV / dt = d^2x / dt^2$	$dW / dt = d^2\varphi / dt^2$	$dI / dt = d^2q / dt^2$
мера инертности, $\tilde{m}$	$m$	$J$	$L$
мера жесткости, $\tilde{k}$	$k$	$mgr$	$1/C$
уравнение энергии без диссипации $\frac{d}{dt} \left( \frac{\tilde{m}}{2} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \frac{\tilde{k}}{2} \xi^2 \right) = 0$	$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0$	$\frac{d}{dt} \left( \frac{JW^2}{2} + \frac{mgr\varphi^2}{2} \right) = 0$	$\frac{d}{dt} \left( \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0$
уравнение собственных колебаний без трения $\tilde{m} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \tilde{k} \xi = 0$	$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$	$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgr\varphi = 0$	$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$
собственная круговая частота $w^2 = \tilde{k} / \tilde{m}$	$w^2 = \frac{k}{m}$	$w^2 = \frac{mgr}{J}$	$w^2 = \frac{1}{LC}$
импульс, $\tilde{p} = \tilde{m} d\xi / dt$	$p = mV$	$M_p = JW$	$\Phi = LI$
коэффициент диссипации, $\tilde{\alpha}$	$\alpha$	$\gamma$	$R$
уравнение энергии с диссипацией $\frac{d}{dt} \left( \frac{\tilde{m}}{2} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \frac{\tilde{k}}{2} \xi^2 \right) = -\tilde{\alpha} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2$	$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = -\alpha V^2$	$\frac{d}{dt} \left( \frac{JW^2}{2} + \frac{mgr\varphi^2}{2} \right) = -\gamma W^2$	$\frac{d}{dt} \left( \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = -RI^2$
уравнение собственных колебаний с трением $\tilde{m} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \tilde{\alpha} \frac{d\xi}{dt} + \tilde{k} \xi = 0$	$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = 0$	$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + mgr\varphi = 0$	$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$
добротность при малом затухании $Q \approx \pi / \delta \approx \frac{\tilde{m} w}{\tilde{\alpha}} = \frac{\sqrt{\tilde{k}\tilde{m}}}{\tilde{\alpha}}$	$Q \approx \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$	$Q \approx \frac{\sqrt{km}}{\tilde{\alpha}} = \frac{\sqrt{mgrJ}}{\gamma}$	$Q \approx \frac{\sqrt{km}}{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
внешнее воздействие $\tilde{F}(t)$	$F(t)$	$M_F(t)$	$U(t)$
уравнение вынужденных колебаний $\tilde{m} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \tilde{\alpha} \frac{d\xi}{dt} + \tilde{k} \xi = \tilde{F}$	$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = F$	$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + mgr\varphi = M_F$	$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U$
импеданс осциллятора $\tilde{Z} = \hat{F} / \hat{V}$ $\tilde{Z} = \tilde{\alpha} + i \left( \tilde{m}\Omega - \frac{\tilde{k}}{\Omega} \right)$	$Z = \hat{F} / \hat{V}$ $Z = \alpha + i \left( m\Omega^2 - \frac{k}{\Omega} \right)$	$Z = \hat{M}_F / \hat{V}$ $Z = \gamma + i \left( J\Omega - \frac{mgr}{\Omega} \right)$	$\tilde{Z} = \hat{U} / \hat{I}$ $Z = R + i \left( L\Omega - \frac{1}{\Omega C} \right)$

Введем ряд физических величин, которые характеризуют процесс затухания и диссипативные свойства колебательных систем с трением. Найдем время, в течении которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз:  $\tilde{Z} = \tilde{k} + i \frac{\tilde{m}}{\Omega} (\Omega^2 - w^2)$ .

$$\frac{A}{Ae^{-\beta t}} = e, \quad \text{откуда} \quad t = 1/\beta, \quad (2.17)$$

т.е. коэффициент затухания  $\beta = \tilde{\alpha}/2\tilde{m}$  обратен по величине промежутку времени, за который амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Важным свойством рассматриваемого типа колебаний является сохранение отношения амплитуд через период  $\bar{T} = T/\sqrt{1-\frac{\beta^2}{w^2}}$  ( $T = 2\pi/w$  – период колебаний без трения; наличие трения увеличивает период до  $\bar{T}$ ). Найдем это отношение, называемое **декрементом затухания**:

$$A_{n-1}/A_n = A(t)/A(t+\bar{T}) = A \exp(-\beta t)/A \exp(-\beta(t+\bar{T})) = \exp(\beta\bar{T})$$

Логарифм этого отношения  $\delta$  есть **логарифмический декремент затухания**

$$\delta = \ln(A_{n-1}/A_n) = \beta \bar{T} = \tilde{\alpha} \bar{T}/2\tilde{m} = (\tau/\bar{T})^{-1} = 1/N = const.$$

Следовательно, он обратен по величине числу колебаний  $N$ , совершаемых за время, при котором амплитуда уменьшится в  $e$  раз. Видно также, что затухание тем быстрее, чем больше коэффициент трения  $\alpha$ , меньше масса  $m$  и длительнее период  $\bar{T}$ . Логарифмический декремент затухания характеризует способность системы рассеивать энергию. Амплитуда колебаний убывает по закону  $\exp(-\beta t)$ . Энергия, запасенная в системе, пропорциональна амплитуде в квадрате (см. пример 2.1), следовательно, она убывает по закону  $\exp(-2\beta t)$ . Тогда относительное уменьшение энергии за период равно:

$$\Delta E/E = \frac{E(t) - E(t+\bar{T})}{E(t)} = \frac{1 - \exp(-2\beta\bar{T})}{1} = 1 - \exp(-2\delta). \quad (2.18)$$

При незначительном затухании ( $\delta \ll 1$ ):  $\exp(-2\delta) = 1 - 2\delta$  и из (6.16) следует

$$\Delta E/E = 1 - (1 - 2\delta) = 2\delta. \quad (2.19)$$

Введем понятие **добротности системы** как величины обратной к величине, определяющей относительную убыль энергии при изменении фазы на один радиан

$$Q = 2\pi E/\Delta E. \quad (2.20)$$

Используя соотношение (2.19), приходим к следующему выражению для  $Q$ , справедливому при незначительном затухании ( $\delta \ll 1$ ):

$$Q = 2\pi E/\Delta E \approx \pi/\delta = \frac{\pi}{\beta\bar{T}} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{\alpha}} \frac{2\pi}{\bar{T}} \approx \frac{\tilde{m}w}{\tilde{\alpha}} = \frac{\sqrt{k\tilde{m}}}{\tilde{\alpha}}. \quad (2.21)$$

Таким образом, при малых  $\delta$  добротность колебательной системы обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания. Существуют колебательные системы с весьма малым декрементом затухания. Например, для колебательного радио-контура  $\delta = 0,02 \dots 0,05$ ; для камертона  $\delta = 10^{-3}$ ; для кварцевой пластинки  $\delta = 10^{-4} \dots 10^{-5}$ .

*Пример 2.2. Оценим число колебаний системы с трением до ее остановки. Т.к. колебания затухают по показательному закону, то, в идеальном случае (теоретически) они прекращаются при  $t \rightarrow \infty$ . Но на практике можно принять, что колебания заканчиваются, когда их амплитуда падает до некоторой дос-*

точно малой доли от начального значения. Обычно условно считают эту долю равной 0,01. Тогда время затухания  $t$  определяется соотношением

$$e^{-\beta t} = 0,01, \quad \text{откуда} \quad t \cong 4.6 \times \frac{1}{\beta} = 4.6 \times \frac{\bar{T}}{\delta}.$$

Если, например, логарифмический декремент затухания  $\delta = 0.1$ , то число колебаний  $N$ , при которых движение практически прекращается, составляет

$$N = \frac{t}{\bar{T}} = \left( 4.6 \times \frac{\bar{T}}{\delta} \right) / \bar{T} = \frac{4.6}{\delta} = 46.$$

Рассмотрим фазовый портрет (семейство фазовых траекторий, соответствующих различным начальным данным) колебательной системы с трением. Уравнение собственных колебаний осциллятора с трением (см. таб. 1)

$$\tilde{m} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \tilde{\alpha} \frac{d\xi}{dt} + \tilde{k} \xi = 0$$

запишем в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{p}}{dt} = -2\beta \tilde{p} - w^2 \xi, \\ \frac{d\xi}{dt} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{m}}. \end{cases}$$

Деля первое уравнение системы на второе, получаем дифференциальное уравнение фазовой траектории

$$\frac{d\tilde{p}}{d\xi} = -\tilde{m} \frac{2\beta \tilde{p} + w^2 \xi}{\tilde{p}}.$$

Семейство решений полученного уравнения находится подстановкой  $z = \tilde{p} / \xi$  и имеет вид [3] (при достаточно малом затухании, когда  $w^2 > \beta^2$ ):

$$(\tilde{p} + \beta \xi)^2 + w_1^2 \xi^2 = A \exp\left( \frac{2\beta}{w_1} \operatorname{arctg} \frac{\tilde{p} + \beta \xi}{w_1 \xi} \right), \quad (2.22)$$

где  $A, w_1$  - константы, определяющиеся из начальных условий и задающие конкретную фазовую траекторию семейства. Используя линейное преобразование координат можно показать [3], что (2.22) описывает семейство спиралей, имеющих асимптотическую точку в начале координат.

В зависимости от структуры фазовых траекторий различают следующие основные типы особых точек (в нашем случае особой точкой является положение равновесия - начало координат в фазовой плоскости  $\tilde{p} = 0, \xi = 0$ ): центр, фокус, узел, седло. Особенность типа центр соответствует семейству эллипсоидальных фазовых траекторий, которые, в частности, были нами получены для незатухающих свободных колебаний ( $\beta = 0$ ). В случае малого затухания  $w^2 > \beta^2$  получается, как уже отмечалось, семейство спиралей и особая точка - фокус. При сильном затухании  $w^2 < \beta^2$  фазовые траектории образуют особенность типа узла, которая при стремлении  $\beta$  к нулю вырождается в седло. Все перечисленные типы особенностей представлены на рис. 2.7 в тех областях изменения параметров  $w^2, \beta$ , где они реализуются [2].

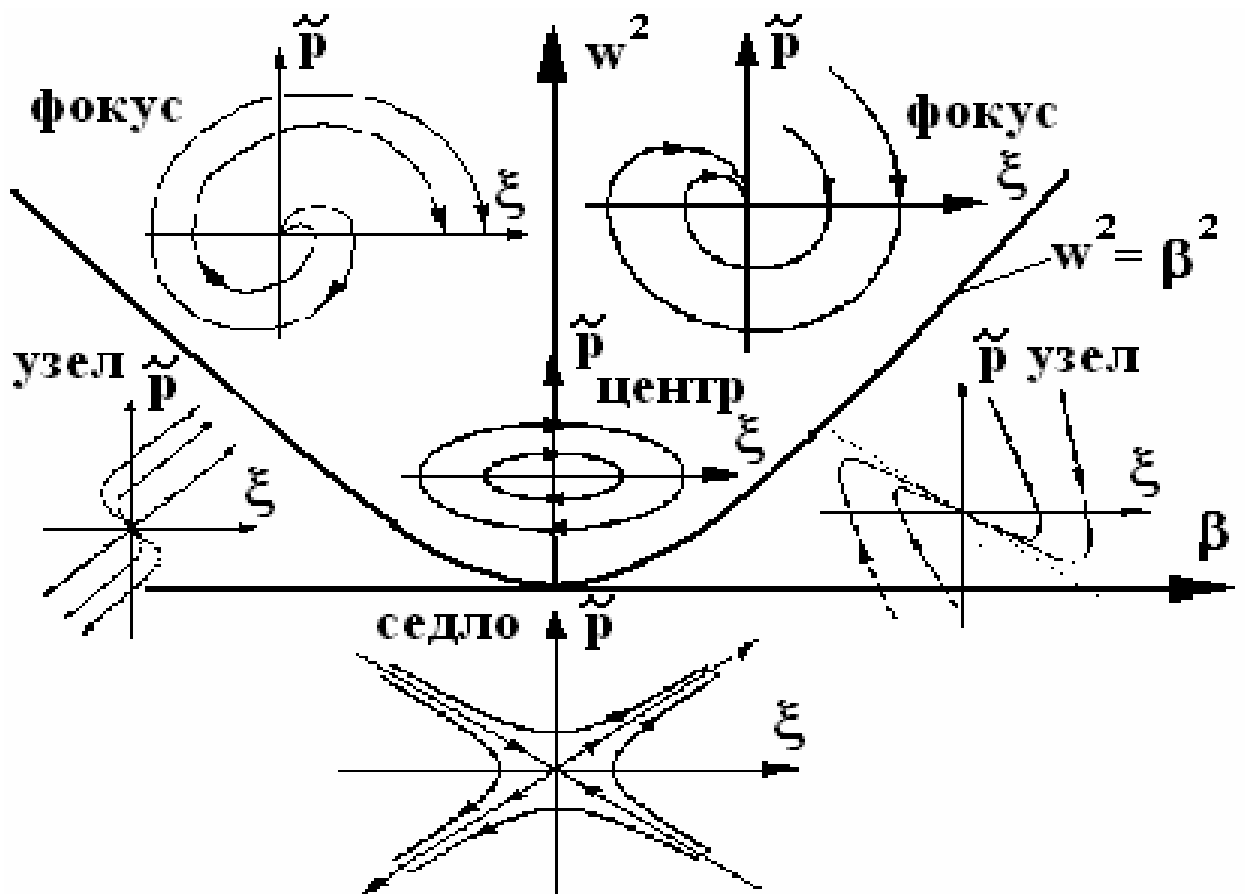


Рис. 2.7. Типы особенностей в окрестности точки равновесия осциллятора

## 2.2. Вынужденные колебания

При свободных колебаниях частота определяется только свойствами системы и не зависит от параметров начального воздействия, вызвавшего колебательный процесс. В тех случаях, когда колебательной системе частота "навязывается" внешним периодическим воздействием, колебания называются вынужденными.

### Механический осциллятор

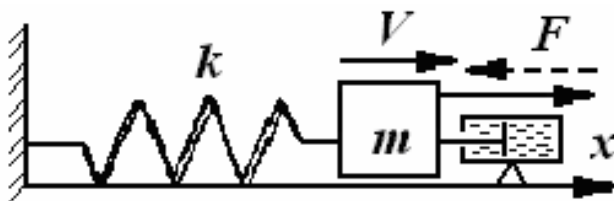


Рис. 2.8. Грузик на пружинке с трением

Уравнение движения грузика на пружинке – это второй закон Ньютона для грузика, спроектированный на направление его движения (ось  $x$ ):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} + F(t).$$

### Электрический осциллятор

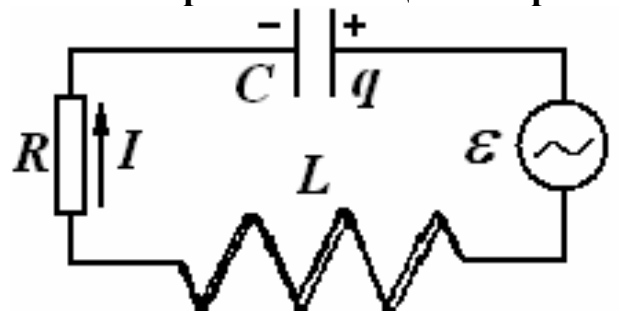


Рис. 2.9. Колебательный контур с сопротивлением

Уравнение для колебаний заряда в электрическом осцилляторе – это второе правило Кирхгофа (алгебраическая сумма падений напряжений равна алгебраической сумме ЭДС):

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U(t).$$

Группируя слагаемые и деля обе части этого уравнения на  $m$ , получаем уравнения малых вынужденных колебаний грузика на пружинке с трением (введено обозначение  $f(t) = F(t)/m$ )

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + w^2x = f(t). \quad (2.23)$$

Группируя слагаемые и деля обе части этого уравнения на  $L$ , получаем уравнение малых собственных колебаний заряда конденсатора в колебательном контуре с сопротивлением (введено обозначение  $u(t) = U(t)/m$ )

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + w^2q = u(t). \quad (2.24)$$

Сравнивая уравнения (2.23), (2.24), в очередной раз видим, что они одного вида, но записаны относительно разных искомых функций времени ( $x(t)$ ,  $q(t)$ ). Обозначая все эти функции через единую переменную  $\xi$  получаем каноническое уравнение малых собственных колебаний с трением ( $\tilde{f} = \tilde{F}/\tilde{m}$ )

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\xi}{dt} + w^2\xi = \tilde{f}. \quad (2.25)$$

Также из вывода следует, что  $\tilde{F} = F, U$ , соответственно, для грузика на пружинке и колебательного контура, как это уже отражено в таблице 2.1.

Полное решение уравнения (2.25) состоит из двух членов: общего решения (2.15) однородного уравнения (2.14), которое затухает со временем, и частного решения, описывающего поведение осциллятора в установившемся режиме (мы предполагаем, что внешнее воздействие – периодическое и такой установившийся режим имеет место), когда влияние начальных условий уже несущественно и все определяется только параметрами внешнего воздействия. Далее рассмотрим (2.25) для частного случая гармонического внешнего воздействия с круговой частотой  $\Omega$  (поскольку любое периодическое воздействие может быть представлено в виде ряда Фурье и уравнение (2.25)-линейно, то решение в общем случае есть линейная суперпозиция решений, которые мы получим в частном случае):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\xi}{dt} + w^2\xi = \tilde{f}_0 \cos(\Omega t). \quad (2.26)$$

При исследовании гармонических процессов широкое распространение получил метод комплексных амплитуд. Любая характеристика состояния (а также ее производные) на любом элементе колебательной системы, отстающая от внешнего воздействия по фазе на  $\varphi$  может быть представлена в комплексном виде

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos(\Omega t - \varphi) = \operatorname{Re}(A e^{i(\Omega t - \varphi)}) = \operatorname{Re}(A e^{-i\varphi} e^{i\Omega t}) = \operatorname{Re}\left(\hat{\xi} e^{i\Omega t}\right), \\ \tilde{V} = \frac{d\xi}{dt} &= -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi) = A\Omega \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Re}\left(A\Omega e^{i(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})}\right) = \operatorname{Re}\left(A\Omega e^{-i(\varphi - \frac{\pi}{2})} e^{i\Omega t}\right) = \operatorname{Re}\left(\hat{V} e^{i\Omega t}\right), \end{aligned} \quad (2.27)$$



где  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица;  $\hat{\xi} = A e^{-i\varphi}$ ,  $\hat{V} = A\Omega e^{-i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$  - комплексные амплитуды характеристики состояния и их скорости, соответственно (здесь и далее комплексные амплитуды обозначаются той же буквой, но с крышечкой сверху).

В силу линейности уравнений малых колебаний оказывается возможным работать с комплексным представлением величин, т.к. линейные операции над комплексной величиной предполагают соответствующие операции над ее действительными и мнимыми частями. Кроме того, это весьма удобно, поскольку линейные операции дифференцирования и интегрирования над экспонентой, а также произведение экспонент, приводят опять к ней же. Конечно, после завершения всех операций, для получения конечного результата, необходимо перейти к действительному представлению, т.е. взять от результата лишь реальную часть. Отметим, что в случае нелинейных операций комплексное представление не применимо и приходится работать с «менее удобными» тригонометрическими функциями.

Представляющее основной интерес частное решение уравнения (2.26) будем искать методом комплексных амплитуд, представив его в комплексной форме

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\xi}{dt} + w^2 \xi = \tilde{f}_0 e^{i\Omega t}. \quad (2.28)$$

Подставив в (2.28) комплексное представление характеристики состояния  $\xi = \hat{\xi} e^{i\Omega t}$  и сократив обе части на экспоненту, получаем

$$i\Omega \left( 2\beta + i\left(\Omega - \frac{w^2}{\Omega}\right) \right) \hat{\xi} = \tilde{f}_0,$$

откуда ( $\tilde{V} = d\xi / dt$ ,  $\hat{\xi} = \hat{V} / (i\Omega)$ )

$$\left( 2\beta + i\left(\Omega - \frac{w^2}{\Omega}\right) \right) \hat{V} = \tilde{f}_0,$$

или, умножая обе части на  $\tilde{m}$ , находим

$$\tilde{Z} \hat{V} = \tilde{F}_0, \quad (2.29)$$

где комплексная величина  $\tilde{Z}$  (отношение комплексных амплитуд вынуждающего действия и скорости), называемая импедансом осциллятора, вычисляется по формуле (частные случаи смотри в таб. 2.1)

$$\tilde{Z} = \tilde{m} \left( 2\beta + i\left(\Omega - \frac{w^2}{\Omega}\right) \right) = \tilde{m} \left( \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{m}} + i\left(\Omega - \frac{w^2}{\Omega}\right) \right) = \tilde{\alpha} + i \frac{\tilde{m}}{\Omega} (\Omega^2 - w^2) = \tilde{\alpha} + i\left(\tilde{m}\Omega - \frac{\tilde{k}}{\Omega}\right). \quad (2.30)$$

В случае электрической цепи соотношения (2.29), (2.30) имеют вид

$$Z \hat{I} = U_0, \quad Z = R + i\left(L\Omega - \frac{1}{\Omega C}\right),$$

что, очевидно, аналогично закону Ома для постоянного тока, текущего через контур с сопротивлением  $Z$ , но теперь записано для комплексной амплитуды переменного тока частотой  $\Omega$  и для контура, содержащего кроме сопротивления  $R$  индуктивность  $L$  и емкостью  $C$ . Активная (действительная) часть импеданса определяется истинным сопротивлением  $R$ , а реактивная (мнимая) – час-

тотой и параметрами индуктивности и емкости. Поскольку (2.28) аналогично закону Ома, а для переменного тока не очень высокой частоты (необходимо выполнение условия квазистационарности  $\Omega < c/L_{ch}$ , где  $c$  - скорость света,  $L_{ch}$  - характерный размер цепи) справедливы те же два закона Кирхгофа, что и для постоянного, то остаются справедливыми и правила сложения импедансов в электрической цепи переменного тока аналогичные для сопротивлений в цепях постоянного тока ( $Z_{\Sigma}$  - импеданс всей цепи):

а) для последовательного соединения  $n$  элементов цепи с импедансами  $Z_i$

$$Z = \sum_{i=1}^n Z_i;$$

б) для параллельного соединения  $n$  элементов цепи с импедансами  $Z_i$

$$1/Z_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n 1/Z_i.$$

Для элементарных элементов цепи (сопротивления, индуктивности и емкости) импедансы легко вычисляются:

а) для емкости имеем  $U = q/C, I = dq/dt$  откуда, используя комплексное представление, получаем  $\hat{U} = \hat{q}/C, \hat{I} = i\Omega \hat{q}, \hat{U} = \frac{\hat{I}}{i\Omega C}$ , т.е.

$$Z_C = \frac{1}{i\Omega C}; \quad (2.31)$$

б) для индуктивности имеем  $U = L \frac{dI}{dt}$ , откуда, используя комплексное представление, получаем  $\hat{U} = i\Omega \hat{I}$ , т.е.

$$Z_L = i\Omega L; \quad (2.32)$$

в) для сопротивления имеем  $U = RI$ , откуда, используя комплексное представление, получаем  $\hat{U} = R\hat{I}$ , т.е.

$$Z_R = R. \quad (2.33)$$

Из (2.29), (2.30) находим частное решение для скорости изменения характеристики состояния гармонического осциллятора

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \text{Re}(\hat{V}e^{i\Omega t}) = \text{Re}\left(\frac{\tilde{F}_0}{\tilde{Z}} e^{i\Omega t}\right) = \text{Re}\left(\frac{\tilde{F}_0}{|\tilde{Z}|} e^{-i\varphi} e^{i\Omega t}\right) = \text{Re}\left(\frac{\tilde{F}_0}{|\tilde{\alpha} + i\tilde{m}(\Omega^2 - w^2)/\Omega|} e^{i(\Omega t - \varphi)}\right) = \\ &= \frac{\tilde{F}_0}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{m}^2(\Omega^2 - w^2)^2/\Omega^2}} \cos(\Omega t - \varphi), \end{aligned}$$

т.е. зависимость амплитуда  $A_V$  скорости от частоты имеет вид

$$A_V = \frac{\tilde{F}_0}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{m}^2(\Omega^2 - w^2)^2/\Omega^2}}. \quad (2.34)$$

При выводе (2.34) использовалось представление

$$\tilde{F}_0 / \tilde{Z} = \tilde{F}_0 (\tilde{\alpha} - i \tilde{m} (\Omega^2 - w^2) / \Omega) / |\tilde{Z}|^2 = |\tilde{Z}| e^{-i\varphi},$$

из которого следует

$$\operatorname{tg} \varphi_V = \frac{\tilde{m} (\Omega^2 - w^2)}{\tilde{\alpha} \Omega} = \frac{(\Omega^2 - w^2)}{2\beta \Omega}$$

или ( $\eta = \Omega / w$ )

$$\varphi_V = \operatorname{arctg} \left( \frac{\tilde{m} (\Omega^2 - w^2)}{\tilde{\alpha} \Omega} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{(\Omega^2 - w^2)}{2\beta \Omega} \right) = \operatorname{arctg} \left( Q \frac{\eta^2 - 1}{\eta} \right) = \operatorname{arctg} \left( Q \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) \right). \quad (2.35)$$

Соотношения (2.34), (2.35) дают искомые амплитуды и фазы скорости изменения характеристики состояния осциллятора. Максимальная амплитуда достигается при резонансе, который, как следует из (2.34) имеет место при частоте внешнего воздействия равной собственной частоте колебаний осциллятора без трения  $\Omega = \Omega_p = w$  (в этом случае знаменатель дроби (2.34) минимален). Так как при резонансе  $A_{Vp} = A_V|_{\Omega=w} = \tilde{F}_0 / \tilde{\alpha}$ , то из (2.21), (2.34) получаем выражение для формы амплитудно-частотной характеристики

$$\frac{A_V}{A_{V0}} = \frac{\Omega / w}{\sqrt{(\Omega / w)^2 + (\tilde{m} w / \tilde{\alpha})^2 (1 - (\Omega / w)^2)^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + Q^2 (1 - \eta^2)^2}} \quad (2.36)$$

Приравнявая в (2.36) отношение амплитуд равным  $1/\sqrt{2}$ , получаем два значения  $\eta$

$$\eta_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \mp \frac{1}{2Q},$$

откуда следует, что относительная ширина резонансной кривой скорости на уровне  $1/\sqrt{2}$  определяется только добротностью осциллятора

$$\frac{\Delta \Omega}{w} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{w} = \frac{\Omega_2}{w} - \frac{\Omega_1}{w} = \eta_2 - \eta_1 = \frac{1}{Q}. \quad (2.37)$$

Таким образом, как следует из (2.37), чем меньше трение (больше добротность  $Q$ ), тем уже пик резонансной кривой.

Соответствующая (2.36) амплитудно-частотная характеристика осциллятора показана на рис. 2.10. На рис. 2.11 показана зависимость фазы от частоты. В соответствии с (2.35) до своего резонанса скорость опережает внешнее воздействие, а после отстает. При больших частотах отставание достигает  $\pi/2$ .

Аналогичные результаты могут быть получены и для характеристики состояния осциллятора  $\xi$ . Так как  $\tilde{V} = d\xi/dt$ , то для комплексных амплитуд имеем

$$\hat{\xi} = \hat{V} / (i\Omega) = -i \hat{V} / \Omega = \frac{\hat{V}}{\Omega} e^{-i\pi/2},$$

т.е. амплитуда характеристики  $\xi$  в  $\Omega$  раз меньше, а ее фаза еще на  $\pi/2$  больше отстает от внешнего воздействия, чем скорость  $\tilde{V}$ . В соответствии с этим из (2.34), (2.35) находим

$$A = \frac{A_V}{\Omega} = \frac{\tilde{F}_0}{\Omega \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{m}^2 (\Omega^2 - w^2)^2 / \Omega^2}}, \quad (2.38)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi_V = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{\tilde{m}(\Omega^2 - w^2)}{\tilde{\alpha}\Omega} \right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{(\Omega^2 - w^2)}{2\beta\Omega} \right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left( Q\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) \right). \quad (2.39)$$

Отметим, что характеристика состояния  $\xi$  всегда отстает от внешнего воздействия, а резонанс наступает в этом случае при частоте  $\Omega = \Omega_p = w\sqrt{1 - 2\beta^2/w^2} = w\sqrt{1 - 1/4/Q^2}$ , которая меньше частоты собственных колебаний  $\bar{w} = w\sqrt{1 - \beta^2/w^2} = w\sqrt{1 - 1/2/Q^2}$ . Так как при резонансе  $A_p = A|_{\Omega=\Omega_p} = \tilde{F}_0/\tilde{\alpha}/\bar{w}$ , то из (2.21), (2.38) получаем выражение для формы амплитудно-частотной характеристики величины  $\xi$

$$\frac{A}{A_p} = \frac{\bar{w}/w}{\sqrt{(\Omega/w)^2 + (\tilde{m}w/\tilde{\alpha})^2 (1 - (\Omega/w)^2)^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}{\sqrt{\eta^2 + Q^2 (1 - \eta^2)^2}}. \quad (2.40)$$

Приравнявая в (2.40) отношение амплитуд равным  $1/\sqrt{2}$ , получаем два значения  $\eta$

$$\eta_{1,2} \approx \sqrt{1 \mp \frac{1}{Q}} \approx 1 \mp \frac{1}{2Q},$$

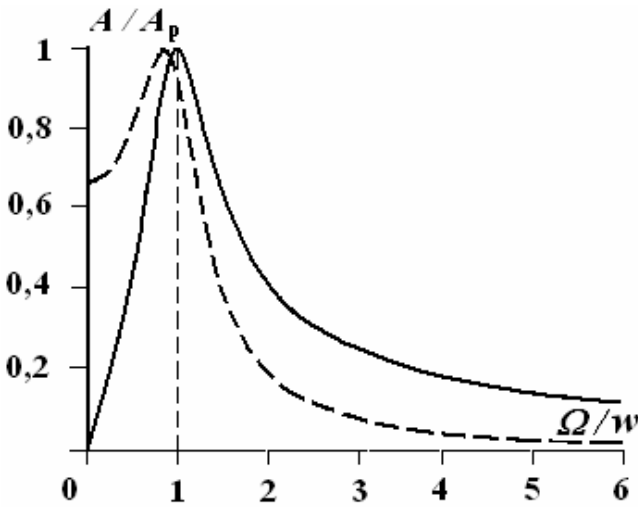


Рис. 2.10. Амплитудно-частотная характеристика гармонического осциллятора

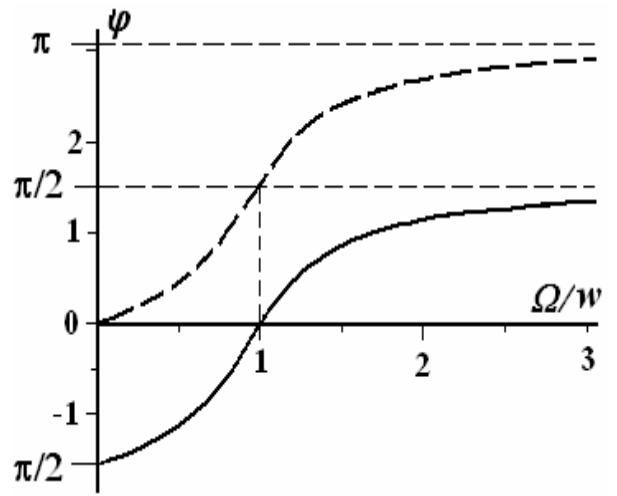


Рис. 2.11. Фазово-частотная характеристика гармонического осциллятора

откуда следует, что относительная ширина резонансной кривой характеристики состояния на уровне  $1/\sqrt{2}$  определяется только добротностью осциллятора

$$\frac{\Delta\Omega}{w} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{w} = \frac{\Omega_2}{w} - \frac{\Omega_1}{w} = \eta_2 - \eta_1 = \frac{1}{Q}. \quad (2.41)$$

Графики зависимостей (2.39), (2.40) представлены пунктирными линиями на рис. 2.11, 2.10, соответственно.

При установившихся (после затухания общего решения однородного уравнения и утраты информации о начальных условиях) вынужденных колебаниях работа внешнего воздействия должна точно компенсировать потери энергии на

диссипацию. Средняя мощность  $\bar{P}_F$ , передаваемая гармоническому осциллятору от внешнего воздействия, равняется ( $T = 2\pi / \Omega$ )

$$\begin{aligned}\bar{P}_F &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{F} \tilde{V} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{F}_0 \cos(\Omega t) \frac{\tilde{F}_0}{|\tilde{Z}|} \cos(\Omega t - \varphi_V) dt = \frac{\tilde{F}_0^2}{|\tilde{Z}|} \int_0^T \cos(\Omega t) \cos(\Omega t - \varphi_V) dt = \\ &= \frac{\tilde{F}_0^2}{|\tilde{Z}|} \int_0^T \frac{1}{2} [\cos(\varphi_V) + \cos(2\Omega t - \varphi_V)] dt = \frac{\tilde{F}_0^2}{2|\tilde{Z}|} \cos(\varphi_V).\end{aligned}\quad (2.42)$$

Посчитаем теперь среднюю диссипируемую мощность  $\bar{P}_\alpha$  (общее выражение для мгновенной мощности диссипации см. в таб. 2.1)

$$\begin{aligned}\bar{P}_\alpha &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\alpha} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\alpha} \tilde{V}^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\tilde{\alpha} \tilde{F}_0^2}{|\tilde{Z}|^2} \cos^2(\Omega t - \varphi_V) dt = \\ &= \frac{\tilde{\alpha} \tilde{F}_0^2}{|\tilde{Z}|^2} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [1 + \cos(2(\Omega t - \varphi_V))] dt = \frac{\tilde{\alpha} \tilde{F}_0^2}{2|\tilde{Z}|^2} = \frac{\tilde{\alpha} \tilde{F}_0}{2|\tilde{Z}|} \cos(\varphi_V).\end{aligned}\quad (2.43)$$

При выводе (2.43) использовано, что

$$\cos(\varphi_V) = \frac{\hat{\alpha}}{|\tilde{Z}|},\quad (2.45)$$

которое получается следующим образом. Поскольку

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{F}_0}{\tilde{Z}} = \frac{\tilde{F}_0}{\tilde{Z} \tilde{Z}^*} \tilde{Z}^* = \frac{\tilde{F}_0}{|\tilde{Z}|^2} \tilde{Z}^* = \frac{\tilde{F}_0}{|\tilde{Z}|} \frac{\tilde{Z}^*}{|\tilde{Z}|} = A_V (\cos(\varphi_V) - i \sin(\varphi_V)),$$

то, учитывая (2.30), находим

$$\cos(\varphi_V) = \operatorname{Re} \left( \frac{\tilde{Z}^*}{|\tilde{Z}|} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{\tilde{Z}}{|\tilde{Z}|} \right) = \frac{1}{|\tilde{Z}|} \operatorname{Re}(\tilde{Z}) = \frac{1}{|\tilde{Z}|} \operatorname{Re}(\tilde{\alpha} + i \frac{\tilde{m}}{\Omega} (\Omega^2 - w^2)) = \frac{\hat{\alpha}}{|\tilde{Z}|}.$$

Сравнивая (2.43) с (2.42), убеждаемся, что, как мы и предполагали, подводимые и диссипируемые средние мощности равны

$$\bar{P}_V = \bar{P}_\alpha = \frac{\tilde{\alpha} \tilde{F}_0^2}{2|\tilde{Z}|^2} = \frac{\tilde{F}_0^2}{2|\tilde{Z}|} \cos(\varphi_V).\quad (2.46)$$

Используя полученные результаты, рассмотрим применительно к электрическим цепям резонансы токов или напряжений.

**Резонанс напряжений.** Резонанс напряжений наблюдается в контуре с последовательным соединением сопротивления, индуктивности и емкости (см рис. 2.6). Комплексные амплитуды тока и падений напряжений на отдельных элементах вычисляется с помощью соотношений (2.29)-(2.33)

$$\hat{I} = \hat{V} = \frac{\tilde{F}_0}{\tilde{Z}} = \frac{\tilde{F}_0}{\tilde{\alpha} + i \frac{\tilde{m}}{\Omega} (\Omega^2 - w^2)} = \frac{U_0}{R + i \frac{L}{\Omega} (\Omega^2 - w^2)}, \quad \hat{U}_R = \hat{I} Z_R = \frac{U_0 R}{R + i \frac{L}{\Omega} (\Omega^2 - w^2)},$$

$$\hat{U}_L = \hat{I} Z_L = \frac{i \Omega L U_0}{R + i \frac{L}{\Omega} (\Omega^2 - w^2)}, \quad \hat{U}_C = \hat{I} Z_C = \frac{U_0}{i \Omega C \left( R + i \frac{L}{\Omega} (\Omega^2 - w^2) \right)}.$$

Из этих выражений для амплитуд напряжений  $U_R, U_L, U_C$  на элементах цепи в резонансе получаем (см. выражение добротности через параметры контура в таб.2.1)

$$U_R = \left| \hat{U}_R \right|_{\Omega=w} = U_0, \quad U_L = \left| \hat{U}_L \right|_{\Omega=w} = \frac{wL}{R} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0 = Q U_0,$$

$$U_C = \left| \hat{U}_C \right|_{\Omega=w} = \frac{1}{wRC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0 = Q U_0.$$

Так как комплексные амплитуды напряжений на емкости и индуктивности при резонансе чисто мнимые и отличаются знаком, то колебания в этих элементах цепи противоположны по фазе (разность фаз равна  $\pi$ ):

$$\hat{U}_L \Big|_{\Omega=w} = \frac{\Omega L U_0}{R} i = Q U_0 \frac{\Omega}{w} e^{i \frac{\pi}{2}}, \quad \hat{U}_C = \frac{U_0}{i \Omega C R} = -Q U_0 \frac{w}{\Omega} i = Q U_0 \frac{w}{\Omega} e^{-\frac{\pi}{2}},$$

$$\Delta \varphi = \varphi_L - \varphi_C = \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

Таким образом, **при резонансе напряжений амплитуды напряжений на индуктивности и емкости в  $Q$  раз больше амплитуды внешнего напряжения и противоположны по фазе.**

**Резонанс токов.** Резонанс токов наблюдается в контуре с параллельным соединением индуктивности и емкости (см. рис. 2.12). Найдем импедансы  $Z_1, Z_2$  двух параллельных участков цепей и результирующий импеданс цепи  $Z$

$$Z_1 = R_1 + i \Omega L, \quad Z_2 = R_2 + \frac{1}{i \Omega C} = R_2 - i \frac{1}{\Omega C},$$

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R_1 + i \Omega L)(R_2 - i /(\Omega C))}{R_1 + R_2 + i(\Omega L - 1/(\Omega C))} = \frac{R_1 R_2 + L/C + i(R_2 L \Omega - R_1 /(\Omega C))}{R_1 + R_2 + i(\Omega L - 1/(\Omega C))} =$$

$$= \frac{(R_1 R_2 + L/C + i(R_2 L \Omega - R_1 /(\Omega C)))(R_1 + R_2 - i(\Omega L - 1/(\Omega C)))}{(R_1 + R_2)^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2} =$$

$$= \frac{(R_1 R_2 + L/C)(R_1 + R_2) + (R_2 L \Omega - R_1 /(\Omega C))(\Omega L - 1/(\Omega C))}{(R_1 + R_2)^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2} +$$

$$+ i \frac{(R_2 L \Omega - R_1 /(\Omega C))(R_1 + R_2) - (R_1 R_2 + L/C)(\Omega L - 1/(\Omega C))}{(R_1 + R_2)^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2) + R_2 (L\Omega)^2 + R_1 / (\Omega C)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2} + \\
&+ i \frac{(L/C - R_1^2) / \Omega C - L\Omega (L/C - R_2^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2} = \\
&= \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2) + Z_w^2 (R_2 (\Omega/w)^2 + R_1 (\Omega/w)^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2} + \\
&+ i \frac{(Z_w - R_1^2) / \Omega C - L\Omega (Z_w - R_2^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2},
\end{aligned}$$

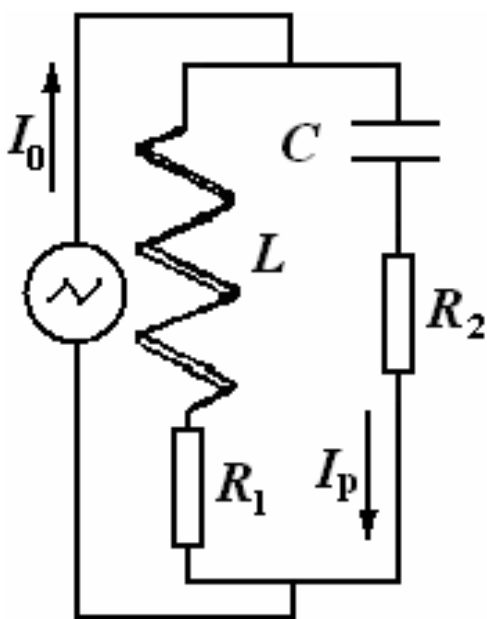


Рис. 2.12. Колебательный контур с параллельным соединением емкости и индуктивности

где введено обозначение для так называемого волнового сопротивления  $Z_w = \sqrt{L/C}$ .

Резонанс имеет место, когда мнимая часть импеданса равна нулю (как мы увидим, в этом случае ток, циркулирующий в контуре, будет по амплитуде в  $Q$  раз больше тока во внешней цепи):

$$(Z_w - R_1^2) / \Omega C - L\Omega (Z_w - R_2^2) = 0,$$

откуда находим резонансную частоту

$$\Omega_p = w \sqrt{\frac{Z_w^2 - R_1^2}{Z_w^2 - R_2^2}}. \quad (2.47)$$

Обычно при реализации условий резонанса токов выполняются условия  $Z_w \gg R_1, Z_w \gg R_2$  и тогда, как видно из (2.47) резонансная частота совпадает с собственной частотой контура  $w$ . Оценим общее сопротивление цепи при резонансе ( $\Omega = \Omega_p \approx w = 1/\sqrt{L/C}$ ):

$$\begin{aligned}
Z_p &= \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2) + Z_w^2 (R_2 (\Omega/w)^2 + R_1 (\Omega/w)^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2} \approx \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2) + Z_w^2 (R_2 + R_1)}{(R_1 + R_2)^2} = \\
\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{Z_w^2}{R_1 + R_2} &\approx \frac{Z_w^2}{R_1 + R_2} \approx \frac{1}{R} \sqrt{L/C} Z_w = Q Z_w.
\end{aligned} \quad (2.48)$$

Здесь под  $Q$  понимается добротность контура, имеющего суммарное сопротивление  $R = R_1 + R_2$ . Пусть внутри контура циркулирует ток с амплитудой  $I_p$ , а амплитуда тока во внешней цепи  $I_0$ . Тогда из условия баланса мощностей имеем

$$\frac{1}{2} I_0^2 Z_p = \frac{1}{2} I_p^2 R,$$

откуда, используя (2.48), находим

$$\frac{1}{2} I_0^2 Z_p = I_p = I_0 \sqrt{\frac{Z_p}{R}} = I_0 \sqrt{\frac{QZ_W}{R}} = I_0 \sqrt{Q \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}} = Q I_0.$$

Таким образом, при резонансе токов, амплитуда тока циркулирующего внутри контура в  $Q$  раз больше тока во внешней цепи, питающей этот контур.

### 2.3. Параметрические колебания

**Параметрические колебания – колебания, которые поддерживаются за счет изменения внутренних параметров системы.** При реализации параметрических колебаний параметры системы модулируются на некоторой частоте  $\Omega_p$ , называемой частотой накачки. При некотором соотношении частоты накачки с собственной частотой колебательной системы имеет место **параметрический резонанс – рост амплитуды колебаний при периодическом изменении параметров системы.**

Типичным примером системы, совершающей параметрические колебания, являются качели. Человек, стоящий на качелях, приседает в точке их максимального отклонения, где центробежная сила равна нулю, а встает в нижней точке (положении равновесия), соответствующей наибольшей скорости и центробежной силе. Колебания поддерживаются за счет работы человека в поле силы тяжести. Изменяемый параметр - расстояние от центра тяжести человека до оси вращения качелей. Резонансная частота накачки вдвое превышает частоту собственных колебаний  $\Omega_p = 2\omega$ . В качестве математической модели качелей может служить физический маятник с периодически изменяемым расстоянием от оси вращения до центра тяжести (который, как известно, приводится к математическому маятнику с изменяемой длиной нити).

Рассмотрим параметрические колебания для гармонического осциллятора, поведение которого описывается уравнением ( $N(t)$ -мощность, затрачиваемая на изменение параметров системы).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\tilde{m}}{2} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \frac{\tilde{k}}{2} \xi^2 \right) = \tilde{N}(t),$$

откуда, дифференцируя, находим

$$\tilde{m} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \tilde{k} \xi \frac{d\xi}{dt} = \tilde{N}(t) - \frac{d\tilde{m}}{dt} \frac{\tilde{V}^2}{2} - \frac{d\tilde{k}}{dt} \frac{\xi^2}{2} = 0$$

или, сокращая на  $\tilde{m} d\xi / dt$ , получаем уравнение Хилла:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + w^2(t) \xi = 0, \quad (2.49)$$

где  $w^2(t) = \tilde{k}(t) / \tilde{m}(t)$  - некоторая периодическая функция времени. При выводе уравнения (2.49) использовалось, что мощность  $N(t)$  затрачивается на изменение энергии  $E_k$  при изменении инерционной характеристики  $\tilde{m}$  и энергии  $E_p$  при изменении потенциальной характеристики  $\tilde{k}$

$$\tilde{N}(t) = \frac{d\tilde{m}}{dt} \frac{\tilde{V}^2}{2} + \frac{d\tilde{k}}{dt} \frac{\xi^2}{2}.$$

В частном случае, когда частота модулируется по гармоническому закону



$w^2(t) = w_0^2(1 - \mu \cos(\Omega_p t))$  уравнение Хилла (2.49) переходит в уравнение Матье:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + w_0^2(1 - \mu \cos(\Omega_p t)) \xi = 0, \quad (2.50)$$

где  $\mu$  - индекс модуляции. Например, для электрического контура, в котором по гармоническому закону меняется емкость, уравнение Матье получается при малом индексе модуляции  $\mu \ll 1$ , так как:

$$w^2(t) = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} = \frac{1}{LC(t)} = \frac{1}{LC(1 + \mu \cos(\Omega_p t))} \approx \frac{1}{LC} (1 - \mu \cos(\Omega_p t)) = w_0^2(1 - \mu \cos(\Omega_p t)).$$

В общем случае решение уравнения (2.50) выражается через специальные функции Матье. Рассмотрим случай  $\mu \ll 1$  и воспользуемся методом теории возмущений, в соответствии с которой будем искать решение в виде

$$\xi = \xi^{(0)} + \mu \xi^{(1)} + \dots \quad (2.51)$$

Вблизи от предполагаемого резонанса  $\Omega_p = 2w_0 + \mu \Delta$  ( $\mu \Delta = \Delta'$  - малая частотная расстройка) уравнение (2.51) принимает вид

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + w_0^2 \xi = \mu w_0^2 \cos((2w_0 + \Delta')t) \xi \quad (2.52)$$

Решение для нулевого приближения возьмем в виде

$$\xi^{(0)} = A(\mu t) \cos\left[\left(w_0 + \frac{\Delta'}{2}\right)t\right] + B(\mu t) \sin\left[\left(w_0 + \frac{\Delta'}{2}\right)t\right], \quad (2.53)$$

где  $A(\mu t), B(\mu t)$  - медленно меняющиеся по сравнению с гармоническими множителями функции времени ( $dA(\mu t)/dt \approx \mu A$ ,  $dB(\mu t)/dt \approx \mu B$ ). Тогда, подставляя (2.51), (2.53) в (2.52) и приравнявая нулю коэффициент при  $\mu$ , получаем уравнение для поправки первого приближения

$$\frac{d^2 \xi^{(1)}}{dt^2} + w_0^2 \xi^{(1)} = w_0 \left\{ \left( -2 \frac{dB}{dt} + \Delta' A - \frac{1}{2} \mu w_0 A \right) \cos\left[\left(w_0 + \frac{\Delta'}{2}\right)t\right] + \left( 2 \frac{dA}{dt} + \Delta' B - \frac{1}{2} \mu w_0 B \right) \sin\left[\left(w_0 + \frac{\Delta'}{2}\right)t\right] \right\}. \quad (2.54)$$

Из (2.54) определяем функции  $A(\mu t), B(\mu t)$  так, чтобы обратились в ноль резонансные члены правой части этого уравнения (иначе в резонансной области  $\xi^{(1)}$  будет неограниченно расти, что приведет к правомерности решения, полученного в рамках теории возмущений, лишь при малых временах)

$$\begin{cases} 2 \frac{dA}{dt} + \Delta' B - \frac{1}{2} \mu w_0 B = 0, \\ -2 \frac{dB}{dt} + \Delta' A - \frac{1}{2} \mu w_0 A = 0. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений  $B$  и учитывая, что  $\Delta' = \mu \Delta$ , находим

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{\mu^2}{4} \left( \Delta^2 - \frac{w_0^2}{4} \right) A = 0, \quad (2.55)$$

откуда (для функции  $B$  получается уравнение совпадающее с (2.55) для  $A$ )

$$A \cong \exp\left(\frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{w_0^2}{4} - \Delta^2}\right), \quad B \cong \exp\left(\frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{w_0^2}{4} - \Delta^2}\right). \quad (2.56)$$

Из (2.56) следует, что при достаточно малой расстройке, т.ч.

$$|\Delta| < \omega_0 / 2, \quad (2.57)$$

амплитуды нулевого приближения  $A(\mu t), B(\mu t)$  будут экспоненциально возрастать, что соответствует параметрической неустойчивости. Из определения расстройки  $\Omega_p = 2\omega_0 + \mu\Delta$  и условия (2.57) получаем

$$|\Delta| = |\Omega_p - 2\omega_0| / \mu = \frac{2\omega_0}{\mu} \left| \frac{\Omega_p}{2\omega_0} - 1 \right| < \frac{\omega_0}{2},$$

откуда следует неравенство, описывающее область параметрической неустойчивости в зависимости от относительной частоты накачки  $\Omega_p / (2\omega_0)$

$$\mu > 4 \left| \frac{\Omega_p}{2\omega_0} - 1 \right|. \quad (2.58)$$

Соответствующая (2.58) область параметрической неустойчивости показана на рис. 2.13 (на рисунке она заштрихована). Отметим, что помимо рассмотренного на частоте  $\Omega_p = 2\omega_0$  параметрический резонанс будет иметь место и при частотах  $\Omega_p = 2\omega_0 / n$ , ( $n=1,2,\dots$ ).

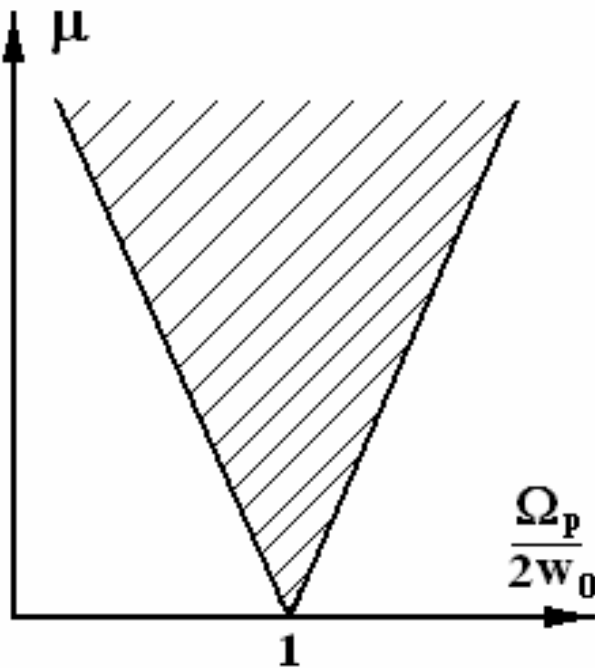


Рис. 2.13. Область параметрической неустойчивости гармонического осциллятора

Рассмотрим фазовые траектории параметрических колебаний гармонического осциллятора. Чтобы представить их вид, предположим, что параметры колебательной системы меняются скачком в требуемых точках (параметр  $\tilde{k}$  возрастает в точках, где максимальна энергия  $E_p$ , и падает, где она минимальна, параметр  $\tilde{m}$  ведет себя аналогично, но по отношению к энергии  $E_k$ ). Увеличение параметра  $\tilde{k}$  при максимальной постоянной (в силу мгновенности изменения параметров системы) величине характеристики состояния  $|\xi|$  приводит к росту энергии

$E_p$  на величину  $\Delta E_p$  и значения  $|\tilde{F}| = \tilde{k}|\xi|$  на  $|\Delta\tilde{F}|$ :

$$E_p + \Delta E_p = \frac{(\tilde{k} + \Delta\tilde{k})\xi^2}{2} = \frac{(\tilde{F} + \Delta\tilde{F})^2}{2(\tilde{k} + \Delta\tilde{k})}, \quad |\Delta\tilde{F}| = \Delta\tilde{k}|\xi|. \quad (2.59)$$

Аналогично, уменьшение параметра  $\tilde{m}$  при постоянной максимальной величине импульса  $\tilde{p} = \tilde{m}\tilde{V}$  приводит к росту энергии  $E_k$  на величину  $\Delta E_k$  и значения  $|\tilde{V}|$  на  $|\Delta\tilde{V}|$ :

$$E_k + \Delta E_k = \frac{\tilde{p}^2}{2(\tilde{m} - \Delta\tilde{m})} = \frac{(\tilde{m} - \Delta\tilde{m})(\tilde{V} + \Delta\tilde{V})^2}{2}, \quad |\Delta\tilde{V}| = \Delta\tilde{m}|\tilde{p}|. \quad (2.60)$$

Как было раньше описано, в отсутствии изменений параметров фазовые траектории гармонического осциллятора, совершающего собственные колебания без трения, представляют собой эллипсы. При реализации скачкообразного изменения параметров колебательной системы появляются соответствующие скачки и на фазовых траекториях, которые теперь удобно представить на плоскости переменных  $(\tilde{F}, \tilde{V})$  (для электрического контура  $(U, I)$ ), поскольку именно эти переменные испытывают скачки согласно соотношениям (2.59), (2.60). Для

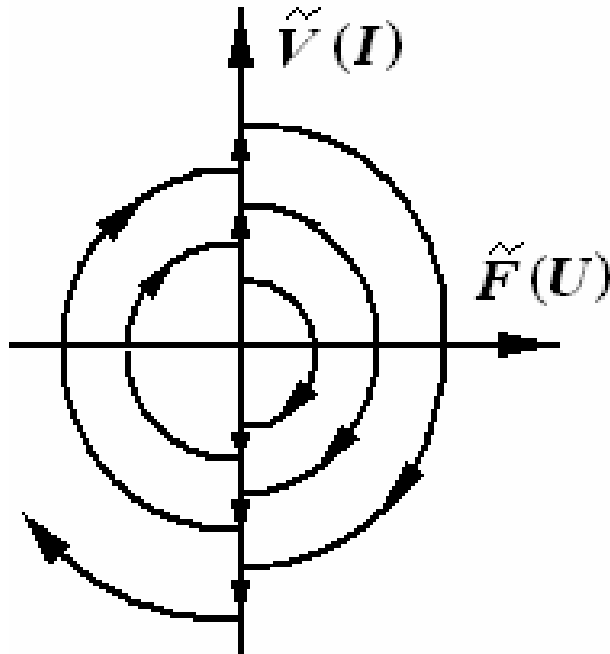


Рис. 2.14. Фазовая траектория гармонического осциллятора при изменении  $\tilde{m}$

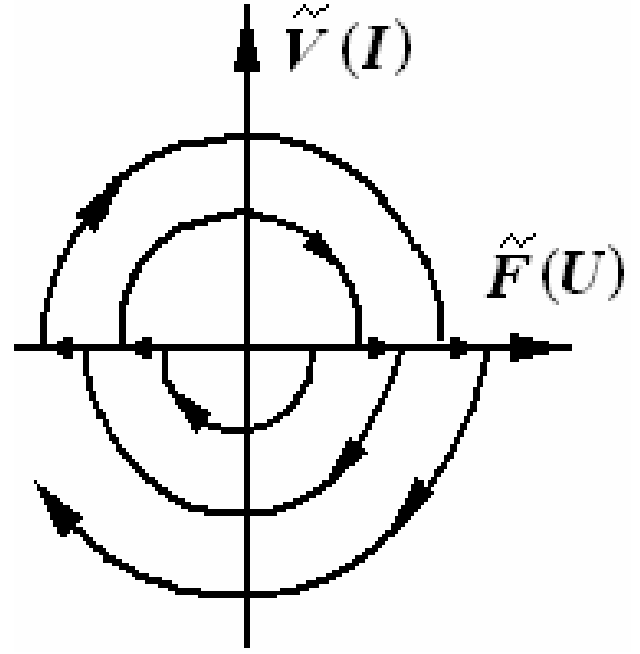


Рис. 2.15. Фазовая траектория гармонического осциллятора при изменении  $\tilde{k}$

случаев изменения параметров  $\tilde{m}$  и  $\tilde{k}$  (для электрического контура  $L, 1/C$ ) фазовые кривые представлены на рис. 2.14, 2.15, соответственно. При плавном изменении параметров (например, гармоническом с экстремумами изменения, в точках, где раньше были скачки параметров) скачки также превратятся в плавные линии переходов от одного эллипса к другому.

#### 2.4. Колебания в распределенных системах

Колебания в распределенных системах рассмотрим на примере механиче-

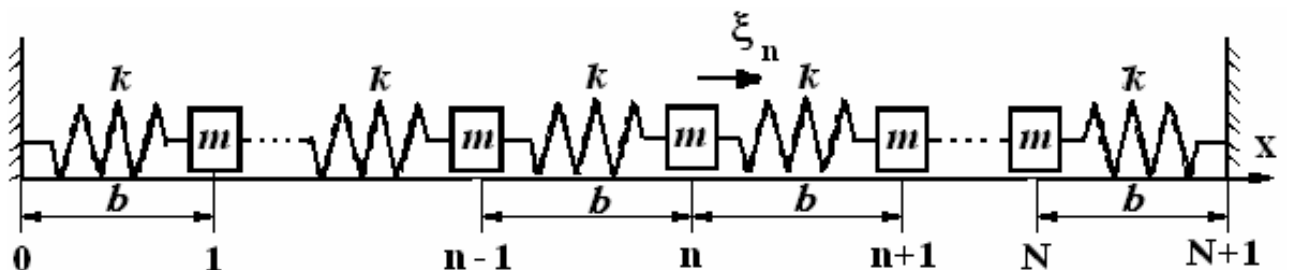


Рис. 2.16. Механическая распределенная система

ских и электрических систем.

**Механическая распределенная система.** Как уже отмечалось, сплошную среду можно рассматривать, как систему осцилляторов. Система точечных масс  $m$ , соединенных упругими связями жесткости  $k$  (рис. 2.16) может служить

классической моделью цепочки атомов. Уравнения движения этих масс представляют собой систему связанных  $N$  ( $N$ -число масс) дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots, \\ m \frac{d^2 \xi_{n-1}}{dt^2} = -k(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}) - k(\xi_{n-1} - \xi_n), \\ m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k(\xi_n - \xi_{n-1}) - k(\xi_n - \xi_{n+1}), \\ m \frac{d^2 \xi_{n+1}}{dt^2} = -k(\xi_{n+1} - \xi_n) - k(\xi_{n+1} - \xi_{n+2}), \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

откуда, деля на  $m$ , получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots, \\ \frac{d^2 \xi_{n-1}}{dt^2} = w^2 (\xi_n - 2\xi_{n-1} + \xi_{n-2}), \\ \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = w^2 (\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}), \\ \frac{d^2 \xi_{n+1}}{dt^2} = w^2 (\xi_{n+2} - 2\xi_{n+1} + \xi_n), \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (2.61)$$

Решение системы (2.61) ищем в виде гармонических колебаний с частотой  $\Omega$

$$\xi_n = A_n \cos(\Omega t - \varphi) = \operatorname{Re}(\hat{A}_n e^{i\Omega t}) \quad (2.62)$$

Подставляем (2.62) в (2.61) и получаем систему  $N$  однородных уравнений относительно искомых амплитуд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots, \\ -\Omega^2 A_{n-1} = w^2 (A_n - 2A_{n-1} + A_{n-2}), \\ -\Omega^2 A_n = w^2 (A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}), \\ -\Omega^2 A_{n+1} = w^2 (A_{n+2} - 2A_{n+1} + A_n), \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (2.63)$$

Запишем (2.63) в виде одного выражения

$$(2w^2 - \Omega^2)A_n = w^2 (A_{n+1} + A_{n-1}), \quad (2.64)$$

в котором индекс  $n$  пробегает значения от 1 до  $N$ . Решение (2.64) удобно искать в виде  $\hat{A}_n = A \sin(n\theta) e^{-i\varphi}$ , тогда из (2.64) получаем

$$(2w^2 - \Omega^2) \sin(n\theta) = w^2 [\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta)],$$

откуда

$$(2w^2 - \Omega^2) \sin(n\theta) = 2w^2 \sin(n\theta) \cos(\theta)$$

или

$$\left[2w^2(1 - \cos(\theta)) - \Omega^2\right] \sin(n\theta) = 0. \quad (2.65)$$

Так как  $\sin(n\theta) \neq 0$  для всех  $n$ , то из (2.65) определяется частоты собственных колебаний распределенной системы:

$$2w^2(1 - \cos(\theta)) - \Omega^2 = 0,$$

откуда

$$\Omega^2 = 2w^2(1 - \cos(\theta)). \quad (2.66)$$

Входящее в (2.66) значение  $\theta$  находится из граничных условий

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_{N+1} = 0.$$

Первое из этих условий удовлетворяется автоматически, а второе сводится к

$$\sin(N+1)\theta = 0,$$

откуда ( $j=1, 2, \dots, N$ ; при  $j$ , превышающих  $N$ , частоты и собственные формы повторяются)

$$\theta = \frac{j\pi}{N+1} \quad (2.67)$$

и согласно (2.66) мы имеем набор собственных частот и соответствующих им собственных форм:

$$\Omega_j = 2w \sin\left[\frac{j\pi}{2(N+1)}\right], \quad (2.68)$$

$$\hat{A}_n(j) = A \sin\left[n \frac{j\pi}{(N+1)}\right] e^{-i\varphi_j} = A_n(j) e^{-i\varphi_j}.$$

Из (2.68) следует, что максимальная частота достигается при  $j=N$  и для больших  $N$  она приближается к удвоенной частоте  $w$ . Каждая собственная частота  $\Omega_j$  и соответствующий ей набор амплитуд  $A_n(j)$  дает решение  $x_n = A_n(j) \cos(\Omega_j t - \varphi_j)$ . Общее решение будет представлять собой линейную суперпозицию этих решений (константы  $A_j, \varphi_j$  определяются из начальных условий;  $n=1, \dots, N$ )

$$\xi_n = \sum_{j=1}^N A_j A_n(j) \cos(\Omega_j t - \varphi_j). \quad (2.69)$$

**Электрические распределенные системы.** Электрическим аналогом рассмотренной механической системы является LC-цепочка, показанная на рис. 2.17.

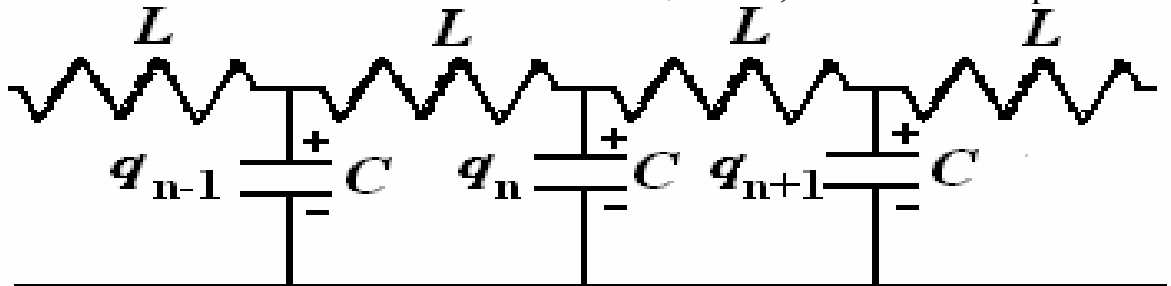


Рис. 2.17. LC-цепочка с ограничением собственных частот сверху

Легко видеть, что система дифференциальных уравнений для зарядов  $q_n$  на конденсаторах будет иметь вид ( $n=1, \dots, N$ )

$$L \frac{d^2 q_n}{dt^2} = -\frac{1}{C}(q_n - q_{n-1}) - \frac{1}{C}(q_n - q_{n+1}) \quad (2.70)$$

или

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = w^2 (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}), \quad (2.71)$$

что аналогично (совпадает, если  $q$  заменить на  $x$ ) системе уравнений (2.61). Соответственно, также, как и в случае с механической системой получаем, что критическая частота  $\Omega_c$ , ограничивающая сверху спектр возможных частот в распределенной системе ( $\Omega \leq \Omega_c$ ), равняется удвоенной частоте парциального  $LC$ -контура:

$$\Omega_c = 2w = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (2.72)$$

Поменяем в  $LC$ -цепочке на рис. 2.17 индуктивности и емкости местами, как это

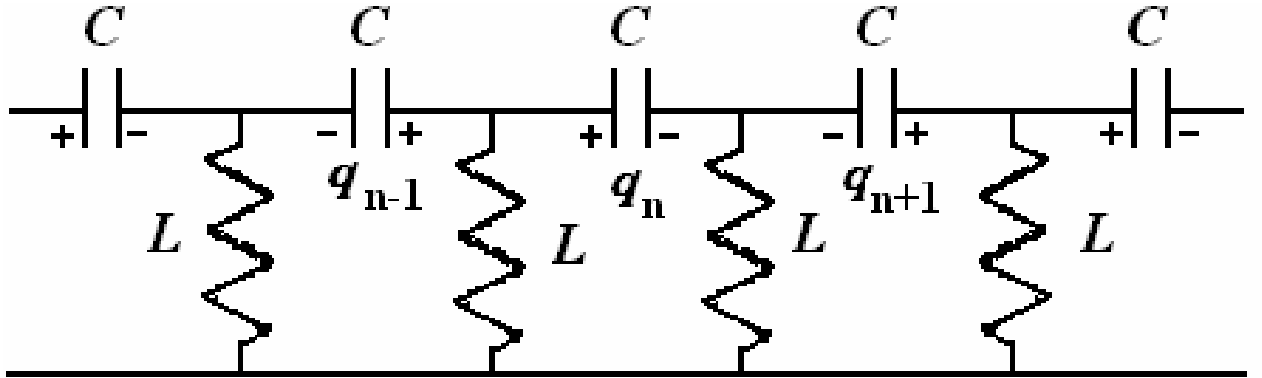


Рис. 2.18.  $LC$ -цепочка с ограничением собственных частот снизу показано на рис.2.18. Тогда состояние такой распределенной системы будет описываться системой связанных дифференциальных уравнений ( $n=1, \dots, N$ )

$$\frac{q_n}{C} = -L \left( \frac{d^2 q_n}{dt^2} - \frac{d^2 q_{n-1}}{dt^2} \right) - L \left( \frac{d^2 q_n}{dt^2} - \frac{d^2 q_{n+1}}{dt^2} \right)$$

или

$$w^2 q_n = \left( \frac{d^2 q_{n+1}}{dt^2} - 2 \frac{d^2 q_n}{dt^2} + \frac{d^2 q_{n-1}}{dt^2} \right) \quad (2.73)$$

Решение (2.73), как и раньше, ищем в виде

$$q_n = A_n \cos(\Omega t - \varphi) = \text{Re} \left( \hat{A}_n e^{i\Omega t} \right) = \text{Re} \left( A \sin(n\theta) e^{-i\varphi} e^{i\Omega t} \right) \quad (2.74)$$

Подставляем (2.74) в (2.73)

$$w^2 \sin(n\theta) = -\Omega^2 (\sin(n+1)\theta - 2 \sin n\theta + \sin(n-1)\theta),$$

откуда находим частоту собственных колебаний цепочки

$$\Omega^2 = \frac{w^2}{2(1 - \cos(\theta))} = \frac{w^2}{4 \sin^2(\theta/2)}. \quad (2.75)$$

Из граничных условий опять находим (сравните с (2.67))

$$\theta = \frac{j\pi}{N+1}$$

и из (2.75) получаем набор собственных частот ( $j=1, \dots, N$ )

$$\Omega_j = \frac{w}{2 \sin\left(\frac{j\pi}{2(N+1)}\right)}. \quad (2.76)$$

Из (2.76) следует, что критическая частота  $\Omega_c$ , ограничивающая снизу спектр возможных частот в  $LC$ -цепочке ( $\Omega \geq \Omega_c$ ), равняется половине частоты парциального  $LC$ -контура:

$$\Omega_c = \frac{w}{2} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \quad (2.77)$$

**Вынужденные колебания. Полосовые фильтры.** Рассмотрим теперь вынужденные колебания в распределенной электрической системе, показанной на рис. 2.19.

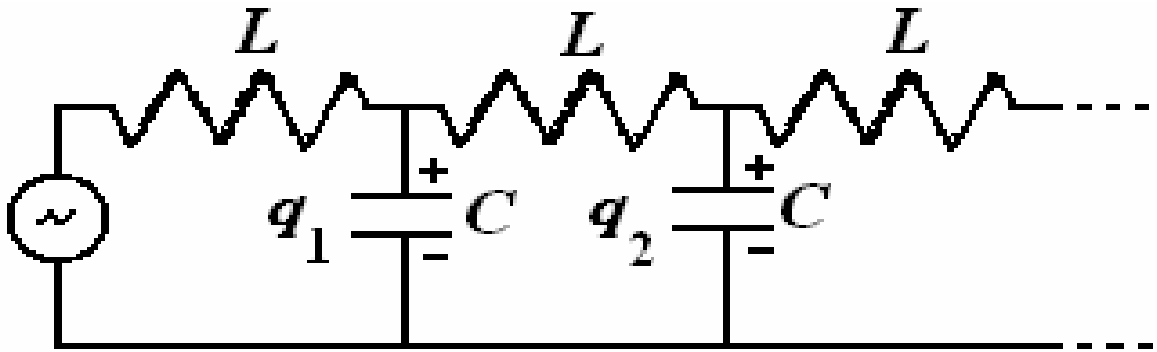


Рис. 2.19.  $LC$ -цепочка с ограничением собственных частот сверху

Система дифференциальных уравнений имеет вид тот же, что и для случая собственных колебаний системы (2.70) за исключением первого уравнения, которое записывается в виде

$$L \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{C} (q_1 - q_2) = U \cos(\Omega t). \quad (2.78)$$

Это уравнение отличается по форме от остальных уравнений системы (2.70).

Для исключения этой асимметрии запишем его формально (заряда  $q_0$  у нас теперь вообще нет) в требуемом виде

$$L \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{C} (q_1 - q_2) + \frac{1}{C} (q_1 - q_0) = 0. \quad (2.79)$$

Из сравнения (2.78) и (2.79) следует, что такая запись возможна, если заряд  $q_0$  удовлетворяет условию

$$-\frac{1}{C} (q_1 - q_0) = U \cos(\Omega t), \quad (2.80)$$

которое теперь играет роль граничного условия на левом краю  $LC$ -цепочки. Частное решение системы (2.70) ищем в виде гармоники с частотой внешнего воздействия

$$q_n = A \sin(n\beta) \cos(\Omega t). \quad (2.81)$$

подставляя (2.81) в (2.70), находим соотношение для  $\beta$

$$-L\Omega^2 \sin(n\beta) = \frac{1}{C} (\sin((n+1)\beta) - 2\sin(n\beta) + \sin((n-1)\beta)),$$

откуда

$$\Omega^2 = 2w^2 (1 - \cos(\beta)). \quad (2.82)$$

Поскольку  $1 - \cos(\beta) \leq 2$ , то из (2.82) следует, что система пропускает лишь частоты ниже критических:

$$\Omega \leq 2w = \Omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Аналогично можно получить, что вынужденные колебания в  $LC$ -цепочке, показанной на рис. 2.18, возможны лишь с частотой большей критической частоты для данной цепочки:

$$\Omega \leq \frac{w}{2} = \Omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Совместное использование рассмотренных  $LC$  – цепочек позволяет получить гибридные схемы, колебания в которых возможны лишь в частотной полосе, ограниченной верхней и нижней критическими частотами. Устройства на основе таких схем выполняют функции полосовых фильтров и широко используются в радиотехнике.

## 2.5. Волновые уравнения

Волновые процессы различной физической природы реализуются по общему принципу: возмущение в какой-нибудь точке среды (поля) через некоторое время проявляется на некотором расстоянии от этой точки, т.е. передается в пространстве с определенной скоростью  $v_f$ . Отметим, что  $v_f$ -скорость распространения возмущения по частицам среды, а не скорость самих частиц, по котором это возмущение проходит. В силу физической общности волновых процессов при достаточной малости возмущений распространение волн независимо от их природы описывается одним и тем же уравнением, называемым волновым. Получим это уравнение, рассматривая среду как систему взаимодействующих механических осцилляторов (см. рис. 2.16). Будем считать, что осцилляторы расположены в каждой из рациональных точек. Множество рациональных чисел – счетно и, следовательно, число осцилляторов, также будет счетным, а, значит, их можно занумеровать. Для  $n^{\text{го}}$  осциллятора уравнение движения запишется в виде

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k(\xi_n - \xi_{n-1}) - k(\xi_n - \xi_{n+1}) \quad (2.83)$$

Функция  $\xi_n$  определена на всех рациональных значениях  $x$  (координатах начальных положений массы), т.к. целочисленному аргументу  $n$  соответствует  $x = nb$  ( $b$  – начальное расстояние между массами, см. рис. 2.16). Поскольку непрерывная (а мы предполагаем ее дважды дифференцируемой) функция единственным образом определяется своими значениями в рациональных точках, то по функции  $\xi_n(t)$  строим единственную  $\xi(x, t)$ , совпадающую с  $\xi_n(t)$  в  $x = nb$ . Для этой новой функции уравнение (2.83) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{kb}{m/b} \left[ \frac{\xi(x+b, t) - 2\xi(x, t) - \xi(x-b, t)}{b^2} \right]. \quad (2.84)$$

В квадратных скобках правой части уравнения (2.84) стоит известная конечно-разностная аппроксимация второй производной по  $x$ . Поскольку мы предполагаем дважды дифференцируемость функции  $\xi(x, t)$ , то предельное значение



этой аппроксимации при  $b \rightarrow 0$  по рациональным точкам существует и совпадает с общим пределом равным второй производной

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = V_f^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (2.85)$$

где введено обозначение для скорости распространения (то, что это скорость распространения будет показано дальше) возмущений  $V_f$ , равной в данном случае

$$V_f = \sqrt{\frac{kb}{m/b}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.86)$$

Здесь введены макроскопические величины плотности  $\rho$  и модуля упругости  $E$ . Конечно, для цепочки атомов это имеет мало смысла, но рассматриваемая распределенная механическая система может быть и моделью стержня, тогда из (2.86) следует, что скорость продольных волн в стержне определяется только модулем Юнга и плотностью материала.

Уравнение (2.86) называется волновым и описывает распространение волн в средах и полях любой физической природы для достаточно малых амплитуд возмущений. Это линейное уравнение второго порядка в частных производных. Оно хорошо исследовано и является одним из объектов изучения в курсе математической физики. Его общее решение имеет вид

$$\xi = f_r(x - V_f t) + f_l(x + V_f t). \quad (2.87)$$

Легко видеть, первое слагаемое  $f_r(x - V_f t)$  решения представляет собой возмущение, распространяющееся без искажения формы в положительном направлении (вправо) по оси  $x$  со скоростью  $V_f$ , т.к. постоянное значение функции  $f_r$  принимает при условии  $x - V_f t = \text{const}$ , дифференцирование которого по времени дает

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{f_r = \text{const}} = V_f. \quad (2.88)$$

Отсутствие искажения формы возмущения обусловлено тем, что все значения функции распространяются с одной и той же скоростью  $V_f$ . Также, очевидно, что второе слагаемое решения (2.87) представляет собой возмущение, распространяющееся влево с той же скоростью  $V_f$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{f_l = \text{const}} = -V_f. \quad (2.89)$$

Обобщение волнового уравнения (2.85) на трехмерный случай имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = V_f^2 \Delta \xi, \quad (2.90)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.91)$$

Совершенно понятно, что решением (2.90) будут, в частности, **плоские волны** (волновые поверхности – уровни равных значений – имеют вид плоскостей), распространяющиеся вдоль направления  $\vec{n}$  (вдоль этого направления они одномерные и описываются соотношением (2.87);  $x_n = (\vec{n}, \vec{r}) = \vec{n}\vec{r}$ ; см. рис. 2.20):

$$\begin{aligned} \xi &= f_r(x_n - V_f t) + f_l(x_n + V_f t) = f_r(\vec{n}\vec{r} - V_f t) + f_l(\vec{n}\vec{r} + V_f t) = \\ &= f_r(n_x x + n_y y + n_z z - V_f t) + f_l(n_x x + n_y y + n_z z + V_f t). \end{aligned} \quad (2.92)$$

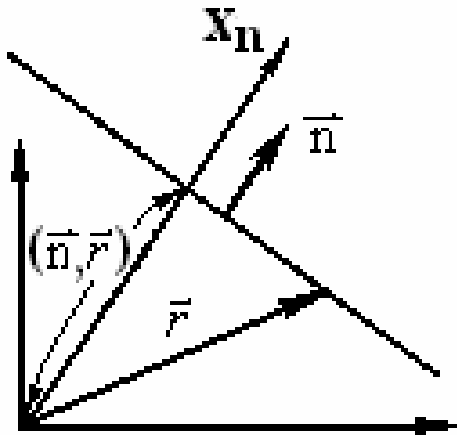


Рис. 2.20. Плоская волна

Легко проверить и непосредственной подстановкой, что (2.92) есть решение (2.90). Принципиальную роль среди различных видов волн играют гармонические волны, поскольку они являются простейшим видом волновых процессов, выделенных среди прочих особыми свойствами осцилляторов (в частности, малые колебания любых осцилляторов также описываются гармоническими функциями, а распространение волн, как было показано, есть перемещение возмущения по цепочке осцилляторов). Общий вид уравнения плоской гармонической волны с круговой частотой  $\omega$  получается из (2.92), если в качестве волновых функций  $f_r, f_l$  взять гармонические, например, косинусы

$$\xi = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{V_f} \right) + \varphi_r \right] + B \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{V_f} \right) + \varphi_l \right], \quad (2.93)$$

где  $\varphi_r, \varphi_l$  - начальные фазы;  $A, B$  - амплитуды. Отметим, что аргументы косинусов записаны в виде, отличающемся от аргументов функций  $f_r, f_l$  постоянным множителем. При этом, очевидно, функция (2.93) останется решением волнового уравнения, а введение круговой частоты  $\omega$  (характеристики временной периодичности волнового процесса) делает выражение более физическим, т.к. теперь аргументы косинусов – безразмерные.

В том случае, когда функции  $f_r, f_l$  в (2.92) являются периодическими с периодами  $T_r, T_l$ , это приводит к возникновению пространственной периодичности  $\lambda$  в плоской волне. Преобразуем аргумент функции  $f_r$  (для волны бегущей влево все делается аналогично; также, как и в случае с гармонической волной мы вводим характеристику временной периодичности  $\omega$ )

$$\omega \left( t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{V_f} \right) = T_r \left( \frac{t}{(T_r / \omega)} - \frac{\vec{n}\vec{r}}{V_f (T_r / \omega)} \right) = T_r \left( \frac{t}{T} - \frac{\vec{n}\vec{r}}{\lambda} \right). \quad (2.94)$$

Из (2.94) следует, что при фиксированном  $t$  с изменением расстояния вдоль нормали  $\vec{n}$  характеристика волнового процесса  $\xi$  меняется с пространственной периодичностью  $\lambda$ , называемой длиной волны. Если же зафиксировать радиус-вектор  $\vec{r}$  точки пространства, то, очевидно,  $\xi$  в этой точке будет менять-

ся с периодом  $T$ . Кроме того, из (2.94) следуют выражения для пространственной и временной периодичностей волнового процесса через периодичность  $T_r$  функции  $f_r$ :

$$T = \frac{T_r}{w}, \quad \lambda_r = V_f \frac{T_r}{w} = V_f T. \quad (2.95)$$

Аргумент (2.94) волновой функции  $f_r$  можно записать и в более симметричном относительно пространственных и временных переменных виде, введя волновой вектор  $\vec{k}$ :

$$T_r \left( \frac{t}{T} - \frac{\vec{n}\vec{r}}{\lambda} \right) = wt - \vec{k}\vec{r}, \quad \vec{k} = \frac{T_r}{\lambda} \vec{n}. \quad (2.96)$$

Согласно (2.96) в случае периодических функций  $f_r, f_l$  плоскую волну с круговой частотой  $w$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \xi &= f_r(wt - \vec{k}\vec{r}) + f_l(wt + \vec{k}\vec{r}), \\ \vec{k} &= \frac{T_r}{\lambda_r} \vec{n} = \frac{T_l}{\lambda_l} \vec{n} = \frac{w}{V_f} \vec{n}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Таким образом, понятие длины волны можно ввести для любой плоской волны (2.92), бегущей влево или вправо с периодическими функциями  $f_r$  или  $f_l$ . Как правило, длину волны используют для характеристики лишь гармонических волн (2.93). В этом случае  $T_r = 2\pi$  и из (2.93), (2.95), (2.96) получаем часто используемые соотношения:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{w}, \quad \lambda = V_f \frac{2\pi}{w} = V_f T, \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}, \\ \xi &= A \cos(wt - kr + \varphi_r) + B \cos(wt + kr + \varphi_l) = \\ &= A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\vec{k}\vec{r}}{\lambda} \right) + \varphi_r \right] + B \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{\vec{k}\vec{r}}{\lambda} \right) + \varphi_l \right]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Найденное соотношение  $\lambda_r = V_f T$ , связывающее пространственную и временную периодичности, требуется для того, чтобы (2.97) было решением волнового уравнения, и имеет ясный физический смысл. За время  $T$  имеющееся в какой-либо точке волновое возмущение с одной стороны распространяется на расстояние  $V_f T$ , а, с другой стороны, это возмущение повторяется через время  $T$  в той же самой точке, т.е. величина возмущений совпадает на расстоянии  $\lambda_r = V_f T$ .

Помимо плоских волн практически важными частными решениями волнового уравнения (2.92) являются **сферические и цилиндрические волны**. Пусть волновой процесс в однородной изотропной среде возбуждается точечным источником. Тогда задача имеет сферическую симметрию, а уравнение (2.92) в сферической системе координат записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = V_f^2 \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \xi)}{\partial r} \right) \right], \quad (2.99)$$

где  $r$  – расстояние от источника. Подстановкой легко проверить, что частным решением этого уравнений является волна, бегущая от источника и затухающая обратно пропорционально радиусу

$$\xi = \frac{1}{r} f_r(r - V_f t). \quad (2.100)$$

В случае гармонической волны (гармонического возбуждения колебаний источником) решение имеет, очевидно, вид

$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (2.101)$$

где  $k$  -волновое число (именно число, в отличие от плоских волн, где используется волновой вектор; здесь ввести единый волновой вектор невозможно, т.к. в разных точках волновой поверхности он имел бы разное направление).

В случае цилиндрической симметрии волновое уравнение в однородной изотропной среде имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = V_f^2 \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r \xi)}{\partial r} \right) \right], \quad (2.102)$$

где  $r$  – расстояние от одинаковых источников, равномерно и достаточно плотно (так, чтобы расстояние между источниками было много меньше  $r$ ) расположенных вдоль оси симметрии. Несмотря на кажущуюся очевидность, решениями уравнения (2.102) не является функции (вторая - для гармонического случая)

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\sqrt{r}} f_r(r - V_f t), \\ \xi &= \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Можно лишь только показать, что на достаточно большом расстоянии (для периодического случая по сравнению с длиной волны) от источников решения стремятся к видам (2.103).

Отметим также, что структура сферических и цилиндрических волн сложнее плоских. Функция  $f_r$  не повторяет функции источника и в волне наряду со сгущением обязательно имеет место разрежение среды (в плоской волне может в частности быть лишь одно разрежение или сгущение).

### **III. АКУСТИЧЕСКИЙ КАНАЛ**

«Познал я наконец-то тайны звука,  
Настроен инструмент чудесный мой.  
Закончилась исканий сладких мука  
Гармонии, в которой звуков строй  
Ласкает слух и лечит нашу душу,  
Дает ей радость, неземной полет».  
*стихотворение о Пифагоре*

#### **3.1. Упругие волны**

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Иродов И.Е.* Волновые процессы. Основные законы: Учеб. пособие для вузов/ 2-е издание.- М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
2. *Дубнищев Ю.Н.* Колебания и волны: Учеб. пособие для вузов/ 2-е издание.- Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2004.
3. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, ФМЛ, 1981.
4. *Куприянов А.И., Сахаров А.В., Шевцов В.А.* Основы защиты информации Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений – М. Издат. Центр «академия», 2006.
5. *Мелик-Гайказян И.В.* Информационные процессы и реальность. –М.: Наука. Физматлит, 1998.
6. *Корогодин В.И.* Информация и феномен жизни. – Пушкино: АН СССР, 1991.
7. *Донской А.Д., Острик А.В., Острик В.М.* Основные законы физики. В 2-х частях. (Учебное пособие для студентов) –М.: ГАСБУ, 1997г. 163с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	3
<b>I. Введение</b> .....	3
1.1. Проблема информационной безопасности.....	3
1.2. Определение и характеристики информации.....	4
1.3. Технические каналы утечки информации.....	5
<b>II. Колебания и волновые процессы</b> .....	7
2.1. Собственные колебания.....	7
2.2. Вынужденные колебания.....	9
2.3. Параметрические колебания.....	10
2.4. Колебания в распределенных системах.....	10
2.5. Волновые уравнения.....	11
<b>III. Акустический канал</b> .....	12
3.1. Упругие волны.....	16
3.2. Отражение и прохождение волн на границе двух сред.....	16
3.2. Энергия упругой волны.....	17
3.3. Звуковые волны.....	18
3.4. Эффект Доплера.....	19
<b>IV. Электромагнитный канал</b> .....	19
4.1. Колебания в электрических линиях передач.....	21
4.2. Волновое уравнение электромагнитной волны и его решения.....	22
4.3. Отражение и прохождение электромагнитных волн на границе двух сред.....	25
4.4. Энергия электромагнитной волны.....	26
4.5. Излучение диполя.....	27
4.6. Излучение радиоволн антеннами.....	27
<b>V. Оптический канал</b> .....	30
5.1. Световая волна.....	31
5.2. Геометрическая оптика.....	32
5.3. Фотометрические величины.....	32
5.4. Интерференция света.....	37
5.5. Дифракция света.....	38
5.6. Поляризация света.....	43
5.7. Взаимодействие света с веществом.....	
5.8. Распространение оптических волн в световодах.....	
<b>VI. Геофизический канал</b> .....	
6.1. Сейсмические поля и волны.....	
6.2. Гравитационные поля.....	
<b>Литература</b> .....	